

**CONCOURS INTERNE 2018
POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS STAGIAIRES DE L'INSEE**

COMPOSITION D'ÉCONOMIE ET SCIENCES SOCIALES

(durée : 4 heures)

Cette composition comporte deux parties :

- la première porte sur les sciences sociales
- la seconde porte sur l'économie

Chacune des deux parties sera notée séparément et comptera pour la moitié de la note finale.

Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur une copie séparée.

PARTIE 1 : SCIENCES SOCIALES

« Statistiques ethniques : enjeux sociologiques et enjeux sociaux »

PARTIE 2 : ÉCONOMIE

« Les enjeux et perspectives de la mise en place d'un revenu universel de base en France »

**CONCOURS INTERNE 2018
POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS STAGIAIRES DE L'INSEE**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

(durée : 4 heures)

Cette composition comporte 8 pages :

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour moitié dans la note finale.

Les exercices sont indépendants et sont tous à traiter.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur une copie séparée.

Concours administrateur Insee interne 2018

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour moitié dans la note finale.

Partie 1 : analyse-algèbre

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient du binôme défini par : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

1. Montrer que, pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme $L_{n,k}$ de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_{n,k}(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

et que ce polynôme est donné par : $L_{n,k}(X) = (-1)^{n-k} \frac{\binom{n}{k}}{n!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (X - j)$

2. Montrer que $\mathcal{B} = (L_{n,0}, L_{n,1}, \dots, L_{n,n})$ est une base de E_n .

3. On définit, pour $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E_n . On notera $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

b) Que peut-on dire de \mathcal{B} pour ce produit scalaire ?

4. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

Déterminer un réel λ_k tel que $X^n + \lambda_k L_{n,k} \in E_{n-1}$.

5. Soit $P \in E_{n-1}^\perp$. Montrer que les coordonnées de P sur la base \mathcal{B} sont $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, où pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \sum_{j=0}^n P(j)j^n$$

6. (a) Montrer que pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on a : $L'_{n,k}(0) = (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$.

(b) Calculer $L'_{n,0}(0)$.

7. Montrer qu'il existe un unique polynôme A appartenant à E_n tel que :

$$\forall P \in E_n, \quad \langle A, P \rangle = P'(0)$$

et que ce polynôme est donné par : $A = \sum_{j=0}^n L'_{n,j}(0) L_{n,j}$

8. On désigne par H_n la somme partielle de la série harmonique : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Établir la formule suivante :

$$\forall P \in E_n, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k} P(t+k) = P'(t) + H_n P(t)$$

9. En déduire enfin la formule sommatoire suivante : $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} (n-k)^n = n^n (H_n - 1)$.

Exercice 2

1. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$. On notera S sa valeur.
2. Montrer que : $S = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

On définit maintenant les fonctions :

$$\psi : x \geq 0 \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt$$
$$\text{et : } \psi_n : x \geq 0 \rightarrow \int_0^n e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt \text{ pour } n \in \mathbf{N}^*.$$

3.
 - a. Montrer que : $\forall x \geq 0, \forall x_0 \geq 0, \forall t \geq 0 : |e^{-tx} - e^{-tx_0}| \leq t|x - x_0|$.
 - b. En déduire que chaque fonction ψ_n est continue sur \mathbf{R}^+ .
4.
 - a. Vérifier que la fonction ψ est bien définie.
 - b. Montrer que la suite de fonctions $\{\psi_n\}$ converge *uniformément* vers ψ , quand $n \rightarrow +\infty$, sur tout intervalle $[\rho, +\infty[$, avec $\rho > 0$.
 - c. Qu'en déduit-on, en termes de propriétés de la fonction ψ ?
 - d. Montrer que : $\forall x > 0 : |\psi(x)| \leq \frac{1}{x}$.

Des raisonnements analogues à ceux des questions 3 et 4 permettent de démontrer que :

- chaque fonction ψ_n est dérivable sur \mathbf{R}^+ et : $\psi'_n(x) = -\int_0^n e^{-tx} \sin t dt$.
- la suite de fonctions $\{\psi'_n\}$ converge *uniformément*, quand $n \rightarrow +\infty$, vers la fonction $h : x > 0 \rightarrow -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t dt$, sur tout intervalle $[\rho, +\infty[$, avec $\rho > 0$.

5. On fixe $\rho > 0$. En exprimant $\psi_n(x)$, pour $x \in [\rho, +\infty[$, sous forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction ψ'_n , montrer que la fonction ψ est dérivable sur $[\rho, +\infty[$ et que : $\psi' = h$.
6. Calculer explicitement les valeurs $h(x)$ pour $x \geq \rho > 0$, au moyen des fonctions usuelles. En déduire la valeur de ψ sur \mathbf{R}^{++} .

7. On cherche à montrer que ψ est continue en 0.

a. Démontrer la relation :

$$\forall x > 0 : \psi(x) - \psi(0) = x \int_0^{+\infty} \left[1 - \cos\left(\frac{u}{x}\right)\right] \frac{1 - e^{-u}(1+u)}{u^2} du.$$

b. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que : $\forall x > 0 : |\psi(x) - \psi(0)| \leq Cx$

c. Conclure.

d. En déduire la valeur de S .

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

On note λ et θ deux réels vérifiant $\lambda > 0$, $\theta > 1$ et X une variable aléatoire qui suit la loi de Pareto de paramètre λ et θ , dont une densité est :

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\theta} \left(\frac{\theta}{t}\right)^{\lambda+1} & \text{si } t > \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{VP}(\lambda, \theta)$ On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{VP}(\lambda, \theta)$

1. Déterminer la fonction de répartition de X .

2. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $Z_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

(a) Établir, pour toute variable aléatoire Z l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}\left(\left[X_{n+1} > \frac{3}{2}\right]\right) \leq \mathbb{P}\left(\left[|Z_{n+1} - Z| > \frac{1}{4}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - Z| > \frac{1}{4}\right]\right)$$

(b) Étudier la convergence en probabilité de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On admet pour la suite le résultat suivant :

Si (X_n) converge en loi vers la loi de la variable aléatoire X et que (T_n) converge en probabilité vers la constante c , alors $(X_n T_n)$ converge en loi vers la loi de la variable cX

3. On suppose dans cette question que θ est connu et que λ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer.

On pose : $Y_i = \ln\left(\frac{X_i}{\theta}\right)$, $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$ et $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{Y}_n}$.

(a) i. Déterminer la loi de Y_k .

ii. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(\bar{Y}_n)$ et de $\text{Var}(\bar{Y}_n)$.

(b) Justifier les deux convergences suivantes :

i.

$$\lambda \sqrt{n} \left(\bar{Y}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1)$$

ii.

$$\lambda \bar{Y}_n \xrightarrow{P} 1$$

(c) Montrer que :

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1)$$

(d) En approchant la loi de $\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda}$ par $\mathcal{N}(0, 1)$, déterminer, en fonction de n et de la valeur observée λ_0 , un intervalle de confiance au risque 0.05 pour λ . (on rappelle que, en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a $\Phi(1, 96) = 0, 975$).

Exercice 2

1^{ère} partie : préliminaires probabilistes

On considère deux variables aléatoires réelles *indépendantes* :

$$U \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (\sigma > 0)$$
$$X \sim \mathcal{B}(1, p) \quad [\text{loi de BERNOULLI}] \quad (p \in]0, 1[).$$

a étant un paramètre réel, on définit la variable aléatoire : $Y = aX + U$.

1. Calculer $EY, VY, E(XY), V(XY)$.
2.
 - a. Calculer la fonction de répartition de Y [on retient, par convention qu'elle s'écrit : $P\{Y \leq y\}$]. On l'exprimera en fonction de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, notée H .
 - b. En déduire la densité de la loi de Y .
3.
 - a. Calculer la fonction de répartition de la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
 - b. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y \leq y$, puis celle de X sachant $y < Y \leq y + \eta$ ($\eta > 0$).
 - c. On note : $P\{X = x / Y = y\} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} P\{X = x / y < Y \leq y + \eta\}$.
Calculer la loi $P\{X = 1 / Y = y\}$. On montrera qu'elle s'exprime, dans le cas $a > 0$, au moyen de la fonction de répartition d'une loi logistique de la forme : $\frac{1}{1 + Ae^{-By}}$.
4. On pose : $Z = Y(1 - X)$. Calculer la fonction de répartition de Z (exprimée au moyen de la fonction H définie ci-dessus).
5. Lorsqu'on ne peut pas observer la variable aléatoire X , on cherche à en construire une approximation à partir de l'observation de la variable Y . Pour cela, on définit :

$$X^* = \begin{cases} 1 & \text{si } Y > c \\ 0 & \text{si } Y \leq c \end{cases}, \text{ où } c \text{ est un réel donné. On suppose ici : } \boxed{a > 0}.$$

Déterminer la valeur de c minimisant l'erreur quadratique de prévision : $E(X - X^*)^2$.

2^{ème} partie : estimation

On considère maintenant une suite de couples de variables aléatoires $(X_i, U_i)_{i=1, \dots, N}$, indépendants et dont les lois et les constructions sont identiques à celle du couple (X, U) de la première partie.

On pose également : $Y_i = aX_i + U_i$. Les observations disponibles sont les couples $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, N}$.

- 6.
- Donner l'expression de l'estimateur des moindres carrés ordinaires de a , soit \hat{a}_N , en fonction de a et des X_i et des U_i .
 - Étudier la convergence en probabilité de l'estimateur \hat{a}_N quand $N \rightarrow +\infty$.
 - Étudier la convergence en loi de $\sqrt{N}(\hat{a}_N - a)$ quand $N \rightarrow +\infty$.
7. Comment estimeriez-vous les paramètres p et σ^2 ? Étudier la convergence en probabilité des estimateurs proposés.