

SESSION 2021

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

* * *

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

* * *

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandée.

* * *

PROBLÈME A.

Dans tout le problème, ε désigne un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. Nous notons la limite à droite d'une fonction f en un point a par $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Les notations alternatives usuelles $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ sont tolérées.

(1) (1a) Que vaut $I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$?

(1b) Calculer la limite $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} I(\varepsilon)$.

(1c) Justifier que $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx = - \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$.

(1d) En déduire la valeur de $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right)$.

(2) Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

(2a) À l'aide du changement de variable $y = -x$, montrer que

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx.$$

(2b) Dans le cas où f est de plus impaire, montrer que

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2 \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x} dx.$$

(3) Soit a un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geq 0 \\ -|x|^a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(3a) Montrer que f_a est continue et impaire.

(3b) Montrer que $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{f_a(x)}{x} dx = \frac{2 - 2\varepsilon^a}{a}$.

(3c) Calculer $I(a) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{f_a(x)}{x} dx \right)$, puis $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} I(a)$.

(3d) En déduire qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour toute fonction continue $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, on ait

$$\left| \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{g(x)}{x} dx \right) \right| \leq C \sup_{x \in [-1, 1]} |g(x)|.$$

(4) Soit $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

(4a) Justifier qu'il existe $y_0 \in [-1, 1]$ tel que $|h'(y_0)| = \max_{y \in [-1, 1]} |h'(y)|$.

(4b) Justifier que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $|h(x) - h(-x)| \leq 2x \max_{y \in [-x, x]} |h'(y)|$.

(4c) Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$,

$$\int_{\varepsilon}^1 \left| \frac{h(x) - h(-x)}{x} \right| dx \leq 2 |h'(y_0)|.$$

(4d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left| \frac{h(x) - h(-x)}{x} \right| dx$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

(5) Soit $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(-x)}{x} = 2h'(0)$.

PROBLÈME B.

(6) Pour cette question, soient $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, -2, 1)$ et $v_3 = (2, 0, 3)$.

(6a) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de \mathbf{R}^3 .

(6b) Montrer que $H = \{x \in \mathbf{R}^3 : \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2, x = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 .

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et tout $j \in \{1, 2, 3\}$, on définit le vecteur $u_{i,j} = v_i - v_j$. On note E_3 le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 engendré par la famille $(u_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$.

(6c) Donner la liste des vecteurs $u_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$.

(6d) Que vaut $\dim(E_3)$?

Dans toute la suite du problème, $n \geq 1$ désigne un entier naturel quelconque et v_1, v_2, \dots, v_n des vecteurs de \mathbf{R}^n tels que la famille (v_1, v_2, \dots, v_n) forme une base de \mathbf{R}^n .

- (7) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on définit $w_{i,j} = v_i - v_j$. On note E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par la famille $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Le but de cette question est de trouver la dimension de E .
- (7a) Montrer que $w_{i,j}$ est le vecteur nul si et seulement si $i = j$.
- (7b) Justifier que E est de dimension inférieure ou égale à n .
- (7c) Montrer que la famille $(w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \dots, w_{1,n})$ forme une famille libre de \mathbb{R}^n .
- (7d) Soient i et j deux entiers dans $\{1, \dots, n\}$; exprimer le vecteur $w_{i,j}$ en fonction des vecteurs $w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \dots, w_{1,n}$.
- (7e) Quelle est la dimension de E ?
- (8) Soient a et b deux nombres réels. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on définit $z_{i,j} = av_i + bv_j$. On note F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par la famille $(z_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Le but de cette question est de trouver dans quels cas $F = \mathbb{R}^n$.
- (8a) Donner un exemple simple de nombres réels a et b pour lequel $F = \mathbb{R}^n$ et un exemple pour lequel $F \neq \mathbb{R}^n$.
- (8b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ soit inversible.
- (8c) On suppose $a^2 \neq b^2$. Trouver deux nombres réels λ et μ tels que $\lambda z_{1,2} + \mu z_{2,1} = v_1$.
- (8d) En déduire que, si $a^2 \neq b^2$, alors $F = \mathbb{R}^n$.
- (8e) Que pensez-vous du cas $a^2 = b^2$?

PROBLÈME C.

Ce problème comporte deux parties.

PARTIE I. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{1, 2, \dots, n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire $X = \min(X_1, X_2)$, minimum entre X_1 et X_2 .

- (9) (9a) Que vaut $P(X_1 = 1)$, la probabilité de l'évènement $\{X_1 = 1\}$?
- (9b) Calculer $P(X = n)$.
- (9c) Montrer que les évènements $\{X = n\}$ et $\{X_1 = 1\}$ sont incompatibles.
- (9d) En déduire que X et X_1 ne sont pas indépendantes.

(10)(10a) Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que $P(X \geq k) = \frac{(n - k + 1)^2}{n^2}$.

(10b) Soit $k \in \{1, \dots, n - 1\}$. Que vaut $P(X = k)$?

(11)(11a) Montrer que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(11b) En déduire la valeur de l'espérance $E(X_1)$ puis calculer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X_1)}{n}$.

(11c) On admet que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrer que $E(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

(11d) Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X)}{n}$.

On considère dorénavant deux nombres réels strictement positifs λ_1 et λ_2 , ainsi que deux variables aléatoires T_1 et T_2 indépendantes, T_1 suivant la loi exponentielle de paramètre λ_1 et T_2 suivant la loi exponentielle de paramètre λ_2 . On s'intéresse à $T = \min(T_1, T_2)$.

(12)(12a) Pour $x \in \mathbf{R}$, que vaut $P(T_1 > x)$?

(12b) Pour $x \geq 0$, que vaut $P(T > x)$?

(12c) Quelle est la loi de T ?

PARTIE II. Soit $m \geq 1$ un entier naturel. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, m\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire Z de loi uniforme sur $\{1, \dots, Y\}$. L'ensemble sur lequel Z est définie est donc aléatoire : par exemple, si la réalisation de Y donne 3, alors Z est uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, tandis que si la réalisation de Y donne 5, alors Z est uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et ainsi de suite.

(13) **Dans cette question seulement**, on suppose qu'il existe un $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que $P(Y = k) = 1$. Quelle est la loi de Z ? Donner, sans justification, son espérance $E(Z)$.

On suppose dans toute la suite que, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, on a $P(Y = k) > 0$.

(14)(14a) Énoncer la formule des probabilités totales.

(14b) Montrer que, pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$,

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=\ell}^m \frac{P(Y = k)}{k}.$$

(14c) Pour $\ell \in \{1, \dots, m\}$, montrer que $P(Z = \ell) \leq \frac{E(Y)}{\ell^2}$.

(15) **Dans cette question seulement**, on suppose que la loi de Y est donnée par la formule

$$P(Y = k) = \frac{2k}{m(m+1)} \text{ pour } k \in \{1, \dots, m\}.$$

(15a) Pour $\ell \in \{1, \dots, m\}$, que vaut $P(Z = \ell)$ dans ce cas?

(15b) Pour $1 \leq \ell \leq k \leq m$, calculer $P(Y = k \mid Z = \ell)$.

(16)(16a) On considère des nombres réels positifs $\{a_{k,\ell}, 1 \leq k \leq m, 1 \leq \ell \leq m\}$. On considère la double somme $\sum_{\ell=1}^m \sum_{k=\ell}^m a_{k,\ell}$. Recopier le tableau ci-dessous en cochant ou

noircissant les cases correspondant aux indices k et ℓ pour lesquels le terme $a_{k,\ell}$ apparait dans cette double somme.

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = m$
$k = 1$					
$k = 2$					
$k = 3$					
$k = 4$					
$k = m$					

Expliquer pourquoi $\sum_{\ell=1}^m \sum_{k=\ell}^m a_{k,\ell} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^k a_{k,\ell}$.

(16b) Montrer que $E(Z) = \sum_{k=1}^m P(Y = k) \frac{k+1}{2}$.

(16c) Exprimer l'espérance de Z en fonction de celle de Y .

(16d) Est-il possible d'exprimer la variance de Z uniquement en fonction de la variance de Y ?

On suppose dorénavant que Y est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble \mathbf{N}^* des entiers naturels strictement positifs, telle que $Y - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose toujours que Z est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, Y\}$.

(17)(17a) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, que vaut $P(Y = k)$?

(17b) Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbf{N}^*$,

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{P(Y = k)}{k}.$$

(17c) Calculer $P(Z = 1)$.