Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

EPREUVES ORALES

(exemples)

Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

Épreuve orale d'admission de mathématiques-statistiques

Chaque sujet est composé de **deux** exercices.

Le candidat doit les traiter **tous les deux** puis disposera de 35 minutes environ pour en présenter les résultats.

Les 10 dernières minutes seront consacrées à des questions portant a priori sur des thèmes autres que ceux déjà abordés.

1. Pour $x \in \mathbf{R}$, on considère les deux fonctions : $f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$ et : $g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 kx}{k^2}$.

   a. Donner le domaine de définition de chacune de ces fonctions. Quelles propriétés élémentaires celles-ci possèdent-elles ?

   b. Déterminer une relation entre f et g.

2. **On se restreint dorénavant à** $\boxed{x \in [0, \pi]}$.

   On s'intéresse maintenant à la convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos kx}{k}$. On note $S_n(x)$ la somme partielle ($n \geq 1$) : $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}$.

   a. Exprimer $S'_n(x)$ sans signe sommatoire.

   b. En déduire une expression de $S_n(x)$ sous la forme d'une intégrale.

   On rappelle l'identité : $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$, *pour tous réels* a *et* b.

   c. En déduire la convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos kx}{k}$, en fonction des valeurs de x, et donner l'expression de sa somme au moyen des fonctions usuelles.

   On rappelle le résultat suivant : si u *est une fonction continue définie sur* $[a,b]$, *alors :* $\int_a^b u(t)\,(\cos nt)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Examiner la convergence des séries $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kx}{k}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 kx}{k}$.

4. Examiner la convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\sin kx|}{k}$.

Sur l'espace vectoriel E = $\mathbb{R}[X]$, on considère l'endomorphisme $L : P \in E \to L(P)$, défini par :

$$[L(P)](X) = (1+X^2)P''(X) - 2X\,P'(X).$$

1.
   a. Quelles sont les valeurs admissibles pour les valeurs propres de cet endomorphisme ?
   On désignera par λ_k ($k \in \mathbb{N}$) les valeurs propres rangées en *ordre croissant*.

   b. Quelles sont les dimensions des sous-espaces propres correspondants ?
   On ne demande pas d'écrire explicitement l'expression des vecteurs propres associés.

2. On se restreint au sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs propres correspondant aux deux plus petites valeurs propres λ_0 et λ_1.

   a. Expliciter une base de vecteurs propres de ce sous-espace.
   b. Écrire la matrice A représentative de L dans cette base.
   c. Pour un entier naturel $p \geq 2$ fixé, trouver une matrice *complexe* B et une matrice *réelle* C telles que : $B^p = C^p = A$.

3. Déduire de ce qui précède la construction d'un endomorphisme h de E tel que : $h^p = L$ ($p \geq 2$ fixé).

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Établir l'égalité suivante :
$$\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{E}(e^{-\lambda X}).$$

2. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
Calculer la probabilité suivante : $\mathbb{P}\left(X_1 \geqslant \sum_{k=2}^{n} X_k\right)$.

3. Soient X_1, X_2, Y trois variables à densité indépendantes, à valeurs positives, où Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Calculer $P(Y > X_1 + X_2)$ en fonction de $P(Y > X_1)$ et de $P(Y > X_2)$.
Quelle propriété est-elle ainsi généralisée ?

4. Montrer, par une méthode analogue, que cette propriété est également vérifiée pour des variables Y, X_1,X_2 indépendantes, à valeur dans $\mathbb{N}$, la variable Y suivant une loi géométrique.

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont la densité conjointe est donnée par :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{y}{2}(1+x^2)} \text{ si } y \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{X,Y}$ est bien une densité de probabilité de couple.
2. (a) Déterminer des densités de X et de Y.
   (b) X et Y sont-elles indépendantes ?
3. (a) Déterminer, pour tout y strictement positif, une densité conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ et reconnaître la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$.
   (b) Déterminer, pour tout réel x, une densité conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ et reconnaître la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.
4. On pose $V = \ln |X|$.
   (a) Déterminer une densité de V.
   (b) Montrer que V admet une espérance et la calculer.

Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

Epreuve orale d'admission, sujet « économie »

Le candidat dispose de 45 minutes pour préparer l'un de ces 3 sujets.

Chaque sujet comporte plusieurs exercices à traiter.

SUJET 1

Le sujet comporte deux exercices à traiter.

Exercice 1 (12 pt)

Deux restaurants gastronomiques sont situés dans le centre historique d'une petite ville où l'offre de ce type est par ailleurs inexistante. Une étude de marché montre que la demande en dîners est de la forme Q = 1000 – 10 p, où Q représente le nombre de dîners servis et p leur prix (en unités monétaires, um).

Les deux restaurants ont des fonctions de coût identiques :

$$C_T = \frac{1}{10} q_i^2 + 10 q_i + 1000$$

où C_T représente le coût total et q_i le nombre de dîners servis par chaque restaurant.

1.1) Si les deux restaurants prennent leurs décisions indépendamment l'un de l'autre, de quel type de marché s'agit-il ? Quels seront les prix et le nombre de repas ? (4 pt)
1.2) Mêmes questions en considérant que l'un des deux restaurants parvient à intégrer dans ses calculs la fonction de réaction de son concurrent. (4 pt)
1.3) Mêmes questions si les deux restaurants parviennent à s'entendre. (4 pt)

Exercice 2 (8 pt)

Soit un consommateur de référence dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité suivante : $U(A,B) = \gamma A^a + \alpha B^a$ avec γ, α et a des constantes positives, A et B les quantités consommées. On ajoute p_a et p_b les prix respectifs des biens A et B, R le revenu monétaire du consommateur de référence.

2.1) Ecrire la condition d'équilibre du consommateur. (3 pt)
2.2) En déduire la relation de consommation entre le bien A et le bien B. (2 pt)
2.3) Calculer les quantités demandées en biens A et B. (2 pt)
2.4) Que représente l'exposant $\frac{1}{1-a}$? Que se passe-t-il si a=0 ? (1 pt)

SUJET 2

Le sujet comporte deux exercices à traiter.

Exercice 1 (10 pt)

Soit un monopole. La fonction de demande inverse est P(x)=a-bx et le coût de production C(y)=cy, avec x la quantité demandée, y la quantité offerte, ainsi que a, b, c strictement positifs.

1.1) Questions sans calcul : Qu'est-ce qu'un monopole ? D'où vient-il ? (2 pt)
1.2) Calculer la recette totale, la recette marginale et la recette moyenne. (2 pt)
1.3) Calculer le coût marginal et le coût moyen. (2 pt)
1.4) Déterminer l'équilibre du monopole. (4 pt)

Exercice 2 (10 pt)

Un étudiant représentatif voit sa satisfaction croître régulièrement de 20 % lorsque sa chance de réussite aux examens (notée C_r et exprimée en points de pourcentage[1]) s'accroît de 10 % et de 5 % lorsque son temps de loisir (noté T_v et exprimée en journées) s'accroît de 10 %.

2.1) Ecrire la fonction Cobb-Douglas qui représente les courbes d'indifférence entre C_r et T_v. (2 pt)

Avant la session d'examens, l'étudiant dispose de 240 jours. Sachant que le taux moyen de réussite est une fonction du nombre de journées de travail (noté T_t) de la forme $C_r = (T_t)^{0,75}$.

2.2) Compte-tenu de la relation liant taux de réussite (C_r) et nombre de journées de travail (T_t), écrire l'utilité de l'étudiant représentatif. (1 pt)
2.3) Ecrire son programme de maximisation sous contrainte. (1 pt)
2.4) Le résoudre pour déterminer le nombre de jours de travail (T_t) et le nombre de journées de loisir (T_v). (5 pt)
(Ne pas tenir compte des conditions de 2^{nd} ordre)
2.5) A quel taux de réussite doit-on s'attendre ? (1 pt)
(Poser le calcul final du taux de réussite sans l'effectuer)

1 Par exemple, $C_r = 50$ signifie 50 % de chances d'être reçu.

$\boxed{\text{SUJET 3}}$

Le sujet comporte trois exercices à traiter.

Exercice 1 (5 pt)

Soit une entreprise dont la fonction de production par $f(L) = L^{1/2}$, où L désigne une quantité de travail. On ajoute s le salaire réel.

1.1) Déterminer les rendements d'échelle de cette entreprise. (1 pt)
1.2) Quelle est la demande de travail de l'entreprise à l'équilibre concurrentiel de longue période ? (2 pt)
1.3) Quelle est l'offre de biens ? (1 pt)
1.4) Quel est le profit ? (1 pt)

Exercice 2 (10 pt)

Un producteur i opère avec la fonction de coût total :
$CT_i(q_i) = 1000 \quad q_i - ¿ \quad 50 \quad q_i^2 + q_i^3$ où q_i est la quantité produite par le producteur i.
La demande agrégée est décrite par la fonction de demande inverse : $P^D(Q) = 3000 - 15\,Q$.

2.1) Quel est le niveau de la production pour lequel les rendements d'échelle sont constants ? (2 pt)
2.2) Quel est le seuil de rentabilité ? (1 pt)
2.3) Pour un prix p donné, quelle est la quantité offerte sur le marché ? (1 pt)
2.4) Quel est le prix qui équilibre le marché en concurrence pure et parfaite et longue période? (4 pt)
2.5) A ce prix, quel est le profit du producteur ? (1 pt)
2.6) Combien y a-t-il de producteurs à l'équilibre concurrentiel ? (1 pt)

Exercice 3 (5 pt)

Un secteur sous compétition parfaite a des firmes identiques et des consommateurs identiques.
Chaque consommateur a un revenu de 10 000 EUR annuels.
La courbe de la demande est représentée par : $Q = 100 - 5\,P$.
La courbe de l'offre est représentée par: $Q = 20 + 3\,P$.

3.1) Quel est le prix d'équilibre? (1 pt)
3.2) Quelle est la quantité d'équilibre? (1 pt)
3.3) Quelle est l'élasticité de la demande au prix d'équilibre? (1,5 pt)
3.4) Quelle est l'élasticité de l'offre au prix d'équilibre? (1,5 pt)

Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

Epreuve orale d'admission : anglais

Le candidat dispose de 45 mn pour commenter un texte abordant un sujet d'ordre général, remis au préalable, et portant sur les domaines économique ou social, suivi d'une interrogation sur les idées principales du texte et d'un échange sur la carrière ou le projet professionnel du candidat.

Exemples de textes pouvant être traités :

Work is no cure for illness – the 24/7 culture is making us sick

25 August 2015
The Guardian

Everybody has experienced that strange paradox with the onset of flu or a bad cold. We know it's going to be a nasty inconvenience. On the other hand, however, people also report a strange sense of reprieve since daily duties and responsibilities can be temporarily suspended. As long as it's nothing serious, the unrelenting pressure to produce can finally be forgotten for a while. At last we can call in sick.

Some see this as their only escape from a job that has become everything.

This might all be about to change in light of the work and pensions secretary Iain Duncan Smith's most recent attack on unemployment and disability benefit claimants. In July he admitted to being "very keen" on having a debate about people funding their own sick pay if they happened to fall ill. After all, it's our responsibility to maintain a healthy lifestyle. So why should employers have to pay?

[...] It seems that the work and pensions secretary has apparently hit on the answer. Working can actually cure people of the serious afflictions that they erroneously thought exempted them from full-time employment. As he stated: "There is one area on which I believe we haven't focused enough – how work is good for your health. Work can help keep people healthy as well as help promote recovery if someone falls ill. So, it is right that we look at how the system supports people who are sick and helps them into work."

The announcement tries to dislodge the idea that mental and physical wellbeing are a prerequisite for gainful employment. Now it has been suggested that the opposite might be the case and that working might actually have recuperative effects. One is instantly reminded of the creepy "work makes you free" slogan used to motivate prisoners in an infamous chapter of 20th-century barbarism.

It is fairly easy to dismiss the notion that work might hold miraculous medicinal properties for those with long-term illnesses and disabilities. Let's face it, that ideological justification for cutting the welfare bill would look weird to even the most pro-capitalist zealot.

Where the announcement is potentially dangerous is in the underlying message that nothing is broken within the employment sector in the UK. This message is aimed at a wider audience, those who are currently employed: work is fundamental to who you are and is the only source of fulfilment and wellbeing one can expect. It can even cure the sick. And for this reason, the real message is that work is beyond reproach. The aim is to make neoliberal capitalism look as if it were really some idyllic 1950s playground of wholesomeness.

But the evidence paints a very different picture. Not only do we work far too much, but it can also have a detrimental impact on our mental and physical wellbeing. Behind the shocking stories of overwork (such as the recent New York Times expose of white-collar employees at Amazon, where some claimed they were hassled for not answering emails in the middle of the night) are those who have simply collapsed under the pressure.

We used to believe that only people employed in dangerous manual jobs were in danger of being harmed in the workplace. But we are now discovering that the 24/7 work ethic promoted over the last 20 years in a range of occupations can be equally as fatal. It was difficult to see this before because the relationship is not obvious, but it seems that office work can kill.

The happiness economists get it wrong when they argue that working makes us happier and more optimistic. Work itself is not intrinsically bad for you, it's the social conditions around it that are the problem. Micro-management, minimum wages and a life inundated by debt can render even the most gratifying job a nightmare from hell.