ORAL HEC Paris 2018

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option littéraire B/L

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définir le maximum d'une fonction réelle de une ou deux variables.

   Pour tout couple $(t,x) \in [0,1]^2$, on pose : $K(t,x) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si } x \leq t \\ t(1-x) & \text{si } x > t \end{cases}$.

2. Résoudre l'équation $K(t,x) = 0$.

3. Soit $t \in]0,1[$ et k_t la fonction définie sur $[0,1]$ par : $k_t(x) = K(t,x)$.

   a) Étudier les variations de la fonction k_t.

   b) Montrer que la fonction k_t présente un maximum que l'on déterminera en fonction de t.

4. En déduire l'existence d'un couple $(t_0, x_0) \in [0,1]^2$ vérifiant pour tout couple $(t,x) \in [0,1]^2$, l'inégalité : $K(t_0,x_0) \geq K(t,x)$.

5. On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. À toute fonction $f \in E$, on associe la fonction $\widehat{f}$ définie sur $[0,1]$ par : $\widehat{f}(t) = \displaystyle\int_0^1 k_t(x) f(x)\, \mathrm{d}x$.

   a) Soit $f \in E$. Montrer que $\widehat{f} \in E$.

   b) Montrer que sur l'intervalle $[0,1]$, $\widehat{f}$ admet une dérivée seconde $\widehat{f}''$ que l'on exprimera en fonction de f.

   c) Soit $g \in E$. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui vérifient $f'' = g$.

Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p vérifiant $0 < p < 1$.
On pose : $Y = \mathrm{e}^X$.

1. À quelle condition sur l'entier $r \geq 1$, le moment $E(Y^r)$ d'ordre r de la variable aléatoire Y existe-t-il ?
2. Calculer alors $E(Y)$.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours : définir le maximum d'une fonction réelle de une ou deux variables.

On appelle maximum d'une fonction réelle f de une ou deux variables la plus grande valeur qu'elle prend sur son domaine de définition D.
Autrement dit, f atteint son maximum en un point x_0 de D si, et seulement si, on a :

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leq f(x_0) \ .$$

Pour tout couple $(t,x) \in [0,1]^2$, on pose : $K(t,x) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si } x \leq t \\ t(1-x) & \text{si } x > t \end{cases}$.

2. Résoudre l'équation $K(t,x) = 0$.

$K(t,x) = 0 \Longleftrightarrow (x = 0, t = 1)$ ou $(x = 1, t = 0)$.

3. Soit $t \in]0,1[$ et k_t la fonction définie sur $[0,1]$ par : $k_t(x) = K(t,x)$.

a) Étudier les variations de la fonction k_t.

Si $x \in [0,t]$, $k_t(x) = x(1-t)$ et k_t est croissante sur $[0,t]$.
Si $x \in [t,1]$, $k_t(x) = t(1-x) = -tx + t$ et k_t est décroissante sur $[t,1]$.

b) Montrer que la fonction k_t présente un maximum que l'on déterminera en fonction de t.

Par suite, la fonction k_t définie sur $[0,1]$ présente un maximum au point $x = t$ et ce maximum vaut $t(1-t)$.

4. En déduire l'existence d'un couple $(t_0, x_0) \in [0,1]^2$ vérifiant pour tout couple $(t,x) \in [0,1]^2$, l'inégalité : $K(t_0, x_0) \geq K(t,x)$.

$$\max_{t\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} K(t,x) = \max_{t\in[0,1]} t(1-t) = 1/4 \ .$$

En effet la fonction $t \longmapsto t(1-t)$ admet un maximum sur $[0,1]$ atteint pour $t = 1/2$.
Donc, pour tout couple $(t,x) \in [0,1]^2$, on a $K(t,x) \leq K(t,t) = t(1-t) \leq K(1/2, 1/2)$.
Finalement, le couple $(t_0, x_0) = (1/2, 1/2)$ convient.

5. On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. À toute fonction $f \in E$, on associe la fonction $\widehat{f}$ définie sur $[0,1]$ par : $\widehat{f}(t) = \displaystyle\int_0^1 k_t(x) f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) $\boxed{\text{Soit } f \in E. \text{ Montrer que } \widehat{f} \in E.}$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\widehat{f}(t) = \displaystyle\int_0^1 k_t(x) f(x)\,\mathrm{d}x = (1-t)\int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x + t\int_t^1 (1-x) f(x)\,\mathrm{d}x$.
On voit aisément que $\widehat{f}(0) = \widehat{f}(1) = 0$ et la dérivabilité (donc la continuité) de $\widehat{f}$ résulte de la continuité de f.
Donc $\widehat{f} \in E$.

b) Montrer que sur l'intervalle $[0,1]$, $\widehat{f}$ admet une dérivée seconde $\widehat{f}''$ que l'on exprimera en fonction de f.

On a :

$$\widehat{f}'(t) = t(1-t)f(t) - \int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^1 (1-x) f(x)\,\mathrm{d}x - t(1-t)f(t)$$

soit encore

$$\widehat{f}'(t) = -\int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^1 (1-x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

et finalement

$$\widehat{f}''(t) = -tf(t) - (1-t)f(t) = -f(t)\ .$$

Donc, $\widehat{f}'' = -f$.

c) $\boxed{\text{Soit } g \in E. \text{ Déterminer l'ensemble des fonctions } f \in E \text{ qui vérifient } f'' = g.}$

Si $g \in E$, on vient de voir que $f = -\widehat{g}$ vérifie $f'' = g\ \ (*)$.

Soit f_1 une autre solution de $(*)$. Alors, $(f_1 + \widehat{g})'' = f_1'' + (\widehat{g})'' = g - g = 0$; donc, il existe des réels a et b tels que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $f_1(t) = -\widehat{g}(t) + at + b$.

De plus, $f_1(0) = f_1(1) = 0$ de même que $\widehat{g}(0)$ et $\widehat{g}(1)$. Par suite, $a = a + b = 0$, donc $a = b = 0$.

Bilan : la seule solution de l'équation $(*)$ dans E est $-\widehat{g}$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p vérifiant $0 < p < 1$.
On pose : $Y = \mathrm{e}^X$.

1. $\boxed{\text{À quelle condition sur l'entier } r \geq 1 \text{, le moment } E(Y^r) \text{ d'ordre } r \text{ de la variable aléatoire } Y \text{ existe-t-il ?}}$

   Pour tout entier $r \geq 1$, on a $Y^r = \mathrm{e}^{rX}$ et par le théorème de transfert, $E(Y^r)$ est la somme de la série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{rn}p(1-p)^{n-1}$ si elle converge.
   Il s'agit d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^r(1-p)$.
   Ainsi, $E(Y^r)$ existe $\Longleftrightarrow r < -\ln(1-p)$.

2. $\boxed{\text{Calculer alors } E(Y).}$

   L'espérance $E(Y)$ existe si et seulement si $-\ln(1-p) > 1 \Longleftrightarrow q = 1 - p < 1/\mathrm{e}$.

   Sous cette condition, on a : $E(Y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^n p\, q^{n-1} = \frac{\mathrm{e}p}{1 - \mathrm{e}q}$.