Planche 33

Ce sujet est composé de deux exercices. Vous présenterez les deux exercices à l'oral. Le jury reviendra sur les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.
préparation : 30 minutes- Interrogation : 30 minutes.

Exercice 1

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace de probabilité (Ω, τ, P) et de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$).
On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

1. Déterminer la loi de U.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[U = n]$.
   (b) Retrouver $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi de T.
4. (a) Calculer $COV(U,T)$.
   (b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

$$E = \{(u_n) \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}} | u_{n+3} + iu_n = 0\}$$

1. montrer que E est un $\mathbb{C}$ ev.
2. Déterminer l'ensembles des suites géométriques de E
3. Soit $\phi : E \to \mathbb{C}^3$ $(u_n) \mapsto (u_0, u_1, u_2)$.
   Montrer que ϕ est un isomorphisme
4. En déduire une base de E et sa dimension .

Planche 45

Ce sujet est composé de deux exercices. Vous présenterez les deux exercices à l'oral. Le jury reviendra sur les questions, y compris celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation, et vous donnera des indications le cas échéant.
préparation : 30 minutes- Interrogation : 30 minutes.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.
Une boite contient $(2n+1)$ jetons bicolores (chaque jeton admet une face rouge et l'autre bleue).
On lance simultanément tous les jetons et on observe leurs faces supérieures.

1. Justifier qu'une, et une seule des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois. On notera X la variable aléatoire associée à ce nombre.
2. Donner la loi de X.
3. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AMB = 0$. Nous souhaitons montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.
Supposons B non nulle et notons $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $i_0 \in [|1, n|]$ tel que $BE_{i_0} = C$ non nulle .
2. Montrer qu'il existe $(C_2, ..., C_n) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(C, C_2, ..., C_n)$ soit une base de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Construisez une matrice $M_1 \in GLn(\mathbb{R})$ telle que $M_1E_1 = C$.
4. $\forall j \in [|1, n|]$ Construisez une matrice $M_j \in Gln(\mathbb{R})$ tel que $M_jE_j = C$.
5. En déduire que $\forall j \in [|1, n|]$ la j ème colonne de A est nulle.
6. Conclure.