Concours interne de recrutement d'administrateurs de l'Insee

EPREUVES ECRITES

Insee
Mesurer pour comprendre

CONCOURS INTERNE 2017

POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS STAGIAIRES DE L'INSEE

COMPOSITION D'ÉCONOMIE et SCIENCES SOCIALES

(durée : 4 heures)

Cette composition comporte deux parties :

- la première porte sur les sciences sociales

- la seconde porte sur l'économie

Chacune des deux parties sera notée séparément et comptera pour la moitié de la note finale.
Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur une copie séparée.

PARTIE 1 : SCIENCES SOCIALES

« La consommation révèle-t-elle encore la structure sociale ? »

PARTIE 2 : ÉCONOMIE

« Les conséquences économiques, pour la France et l'Europe, de la sortie du Royaume-Uni de l'Union européenne »

CONCOURS INTERNE 2017

POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS STAGIAIRES DE L'INSEE

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES et STATISTIQUES

(durée : 4 heures)

Cette composition comporte 6 pages :

L'épreuve finale est constituée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour moitié dans la note finale.

Les exercices sont indépendants et sont tous à traiter.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur une copie séparée.

Partie 1 : Algèbre-Analyse

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel ; on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, muni du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

On note $\|\ .\ \|$ la norme associée et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout polynôme P, on désigne par P' sa dérivée et on considère l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & \left[(X^2-1)P'\right]'. \end{array}$$

Partie A - Étude de Φ

1. Donner la matrice A de Φ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer les valeurs propres de Φ.
3. Montrer que Φ est diagonalisable.
4. Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $\left(\mathbb{R}_n[X], \langle\ ,\ \rangle\right)$.

Partie B - Construction d'une base orthonormale

On se propose dans cette partie de construire, par un procédé différent de celui de Schmidt, une famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ vérifiant, pour tout entier m de $[\![0, n]\!]$, les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{degré}(P_m) = m \\ P_m(1) = 1 \\ \forall m \geqslant 1, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \quad \langle P_m, Q\rangle = 0. \end{cases}$$

5. Déterminer P_0 et montrer que, si cette suite de polynômes existe, alors elle est unique.
6. On suppose que cette suite de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ existe et on considère, pour tout entier m appartenant à $[\![0, n]\!]$, la suite $(Q_0, Q_1, \ldots Q_m)$ de polynômes définie par :

$$\begin{cases} Q_0 = P_m \\ \\ Q_j(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} Q_{j-1}(t)\mathrm{d}t \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant m. \end{cases}$$

   (a) Déterminer, pour tout j de $[\![0, m]\!]$, le degré de Q_j.

   (b) Montrer que, pour tout j de $[\![1, m]\!]$, Q_j est divisible par $(X+1)^j$.

   (c) Montrer que, pour tout j de $[\![1, m]\!]$, Q_j est divisible par $(X-1)^j$.

   (d) Déduire de ce qui précède que, pour tout élément m de $[\![0, n]\!]$, il existe un réel k_m tel que :

$$P_m(X) = k_m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}X^m}\left[(X^2-1)^m\right].$$

   (e) En utilisant la formule de Leibniz et la condition $P_m(1) = 1$, déterminer l'expression de k_m en fonction de m

7. On veut vérifier réciproquement que la suite $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, où, pour tout m de $[\![0, n]\!]$, P_m est défini par la relation obtenue à la question 6d, est bien solution du problème.
On pose, pour tout m de $[\![0, n]\!]$: $W_m(X) = (X^2-1)^m$.

   (a) Vérifier que : $(X^2-1)W_m'(X) = 2mXW_m(X)$.

   (b) En dérivant $m+1$ fois la relation précédente, calculer $\Phi(P_m)$ en fonction de P_m.

(c) En déduire que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est bien une famille orthogonale de polynômes échelonnés en degré.

8. On se propose dans cette question de déterminer la norme de P_m.
   (a) Montrer que P_m a la même parité que m et en déduire la valeur de $P_m(-1)$.
   (b) Établir l'égalité suivante :
$$\langle X, P_m P'_m\rangle = 1 - \frac{1}{2}\|P_m\|^2.$$
   (c) Montrer, en utilisant $XP'_m(X) - mP_m(X)$, que : $\langle X, P_m P'_m\rangle = m\|P_m\|^2$.
   (d) En déduire une base orthonormale $(R_0, R_1, \dots, R_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Exercice 2

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs telle que la série de terme général a_n soit convergente.

Pour tout entier naturel n, on pose : $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.

On se propose d'étudier, pour tout réel α non nul, la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$.

Question préliminaire

Que peut-on dire de la série de terme général u_n dans le cas où $\alpha < 0$?

■ ■ ■ ■ ■ ■

On suppose dans la suite que $\alpha > 0$

1. On suppose dans cette question que : $a_n = \rho^n$, où $0 < \rho < 1$.
   (a) Calculer R_n.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$.
2. On suppose dans cette question que $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.
   (a) Établir, pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :
$$R_{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant R_n.$$
   (b) En déduire que : $R_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   (c) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$.
3. On revient dans cette question au cas général et on suppose que $\alpha = 1$.
   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, $\ln(1 - u_n)$ en fonction de $\ln(R_{n+1})$ et $\ln(R_n)$.
   (b) En déduire que la série de terme général $\ln(1 - u_n)$ est divergente.
   (c) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{R_n}$?
4. Déduire de ce qui précède la nature, pour tout réel $\alpha > 1$, de la série de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$.

   On suppose dans la suite que α est un réel de $]0, 1[$.

5. On revient dans cette question au cas où (a_n) est une suite géométrique de raison ρ, soit : $a_n = \rho^n$, avec $\rho > 0$.
   (a) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$ en fonction de α et de ρ.
   (b) Soit β un réel appartenant à $]0, 1[$. Établir, pour tout réel x de $]0, 1[$, l'inégalité suivante :
$$\frac{1 - x}{1 - x^\beta} \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

(c) En déduire l'inégalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{R_n^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right)^{1-\alpha}. \tag{1}$$

(d) Établir la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{R_n^\alpha} \underset{\rho \to 1}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right)^{1-\alpha}.$$

6. On revient au cas où la suite (a_n) est quelconque.

(a) En réutilisant l'inégalité démontrée à la question 5.(b), appliquée à un x bien choisi de $]0,1[$, établir l'inégalité suivante :

$$R_n^{1-\alpha} - R_{n+1}^{1-\alpha} \geqslant (1-\alpha) R_n^{-\alpha} (R_n - R_{n+1}).$$

(b) En déduire que la série de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$ est convergente et que l'inégalité (1) de la question 5.(c), est toujours valide.

Partie 2 : Probabilités-Statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad V_n = \ln(Z_n).$$

1. (a) Déterminer la densité de la variable $-\ln(X_k)$ et en déduire que la densité, f_n, de Z_n est donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!} \text{ si } x \in]0,1] \\ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   (b) On note F_n la fonction de répartition de Z_n.
   Donner, pour x appartenant à $]0,1]$, l'expression de $F_n(x)$ sous forme de somme.

   (c) Étudier la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$.

   (d) Étudier la convergence en probabilité de la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$.

2. (a) Déterminer la fonction de répartition de V_n.

   (b) Étudier la convergence en loi de la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$.

3. On note respectivement h_n et H_n la densité et la fonction de répartition de S_n.

   Soit t un réel appartenant à $[0,1]$. On pose :

$$\begin{cases} T_t = \min\{n \geqslant 1, S_n > t\} \text{ si cet ensemble est non vide} \\ \\ T_t = -1 \text{ si cet ensemble est vide.} \end{cases}$$

   (a) Établir, pour tout réel x, la formule suivante :

$$H_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} H_n(t)dt.$$

   (b) Donner, pour tout x de $[0,1]$, l'expression de $H_n(x)$.

   (c) Montrer que $\mathbb{P}([T_t = -1]) = 0$.

   (d) Déterminer la loi de la variable aléatoire T_t.

   (e) Calculer l'espérance de T_t.

Exercice 2

Préliminaire

Soit F une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1. Étudier les liens entre les trois propositions suivantes :
   (a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tF'(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0$.

2. Que deviennent les implications obtenues si l'on rajoute l'hypothèse : F est décroissante et positive ?

■ ■ ■ ■ ■ ■

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2, indépendantes, *centrées*, de même loi, admettant une variance σ^2 non nulle et une médiane $q_{\frac{1}{2}}$.
On note G leur fonction de répartition, que l'on suppose de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et g leur densité.

3. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big[1-G(x)\big] = \lim_{x\to-\infty} xG(x) = 0$.

4. On pose $X = \max\{X_1, X_2\}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) Donner la densité de X.
   (c) Quel est le premier quartile de la loi de X ?

5. On pose $B = \mathbb{E}(X)$. Établir l'égalité suivante :
$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \big[1-G(t)\big]G(t)\mathrm{d}t.$$

6. Dans cette question, on fait l'hypothèse que la loi des X_i est symétrique.
   Montrer alors la relation suivante :
$$B = 2\int_0^{+\infty} tg(t)\big[2G(t)-1\big]\mathrm{d}t.$$

7. On suppose dans cette question que X_1 et X_2 suivent la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Montrer que $B = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

8. On revient à l'hypothèse de la question 6. Montrer que $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$.

9. Application :

   On considère deux suites de variables aléatoires $(Y_{1,j})_{j\geqslant 1}$ et $(Y_{2,j})_{j\geqslant 1}$, toutes indépendantes entre elles, de même loi, admettant une fonction de répartition de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, d'espérance m et de variance non nulle, σ^2. On suppose que la loi commune des $Y_{1,j} - m$ et $Y_{2,j} - m$ est symétrique.

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
$$\overline{Y}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{1,i} \text{ et } \overline{Y}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{2,i}.$$

   On définit enfin l'estimateur :
$$\hat{m} = \max\{\overline{Y}_1, \overline{Y}_2\}.$$

   (a) Montrer que $\hat{m}$ est un estimateur biaisé de m.
   (b) Calculer l'erreur quadratique moyenne de $\hat{m}$. Que peut-on en conclure ?
   (c) Calculer $\mathrm{Var}(\hat{m})$ dans le cas où la loi commune des variables $Y_{1,j}$ et $Y_{2,j}$ est la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.