



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2012

Conception : H.E.C.

OPTION LITTÉRAIRE

MATHÉMATIQUES B/L

Lundi 14 mai 2012, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $x_0 \in]0, 1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Partie 1

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f à valeurs dans \mathbb{R} , définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = x - x^2$.
- 2.a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente.
b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $0 < x_n \leq \frac{1}{n+1}$.
b) Retrouver ainsi la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = nx_n$.
a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , que l'on ne demande pas de calculer.
c) Montrer que : $0 < \ell \leq 1$.
5. On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.
a) Montrer que la série de terme général $\frac{w_n}{n}$ est convergente.

- b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de x_n et v_n .
 c) En déduire que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell(1 - \ell)$.
 d) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.
 e) Donner un équivalent simple de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 2

6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n soit divergente, et soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente. On pose : $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a) Établir pour tout entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $n > n_0$, l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{1}{S_n} \left(\sum_{k=1}^n u_k y_k \right) - L \right| \leq \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^{n_0} u_k |y_k - L| + \frac{1}{S_n} \sum_{k=n_0+1}^n u_k |y_k - L|$$

b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n u_k y_k = L$.

7. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et γ un réel tels que :

- la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_{n+1} - t_n}{z_{n+1} - z_n} = \gamma$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = z_n - z_{n-1}$ et $b_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les propriétés de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la question 6.

b) En appliquant le résultat de la question 6 aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{z_n} = \gamma$.

8.a) Établir l'équivalent suivant : $\frac{n(1 - nx_n)}{\ln n} \sim \frac{1}{\ln n} - n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} - 1 \right)}{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = 1$.

c) En déduire, en utilisant le résultat de la question 7 avec $t_n = \frac{1}{x_n} - n$ et $z_n = \ln n$, l'existence d'une suite

$(\varepsilon_n)_{n \geq 2}$ de limite nulle telle que : $\frac{n(1 - nx_n)}{\ln n} = 1 - \varepsilon_n$.

d) En déduire finalement le développement asymptotique suivant : $x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2} \varepsilon_n$.

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Tout vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n est identifié à la matrice-colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la

base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n .

On note $\text{Sp}(K)$ (respectivement $\text{Sp}(\Phi)$) l'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée K (respectivement d'un endomorphisme Φ d'un espace vectoriel de dimension finie).

On note tM la matrice transposée d'une matrice M et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 Dans tout l'exercice, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables.
 On définit les trois endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f_A , g_B et $h_{A,B}$, par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_A(M) = AM, g_B(M) = MB \text{ et } h_{A,B} = f_A - g_B$$

- 1.a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur de \mathbb{R}^n , vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .
 Montrer que X^tX est un vecteur propre de f_A et donner la valeur propre associée.
 - b) Soit θ une valeur propre de f_A . Montrer que la matrice $A - \theta I_n$ n'est pas inversible.
 - c) Dédurre de ce qui précède que $\text{Sp}(f_A) = \text{Sp}(A)$.
 - d) Montrer que $\text{Sp}({}^tB) = \text{Sp}(B)$. En déduire que $\text{Sp}(g_B) = \text{Sp}(B)$.
- 2.a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, μ une valeur propre de tB et Y un vecteur propre associé.
 Montrer que X^tY est un vecteur propre de $h_{A,B}$ et donner la valeur propre associée.
 - b) Soit β une valeur propre de $h_{A,B}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.
 Montrer, en utilisant le fait que B est diagonalisable, qu'il existe un vecteur propre V de B associé à une valeur propre μ , tel que $MV \neq 0$.
 En déduire qu'il existe un scalaire $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\beta = \lambda - \mu$.
 - c) Dédurre de ce qui précède que $\text{Sp}(h_{A,B}) = \{\lambda - \mu, \lambda \in \text{Sp}(A), \mu \in \text{Sp}(B)\}$.
 - d) Démontrer l'équivalence suivante : $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset \Leftrightarrow h_{A,B}$ est bijective.

3. Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) une base de \mathbb{R}^n et V un vecteur de \mathbb{R}^n .

On note pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_j = \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ p_{2,j} \\ \vdots \\ p_{n,j} \end{pmatrix}$. On pose : $P = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer en fonction des réels $p_{i,j}$ et v_i , les éléments (l_1, l_2, \dots, l_n) de la matrice tVP .
- b) En déduire que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un unique vecteur V_i de \mathbb{R}^n , tel que : ${}^tV_i X_i = 1$, et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $j \neq i$, ${}^tV_i X_j = 0$.
- c) On considère une base (X_1, X_2, \dots, X_n) de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de A , et une base (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de tB .
 On pose, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $M_{i,j} = X_i^t Y_j$.
 Montrer que la famille $(M_{i,j})$, où $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $h_{A,B}$ est diagonalisable.

EXERCICE 3

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p , où p est un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.
 Soit N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* , indépendante des variables aléatoires $X_n (n \in \mathbb{N}^*)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$, et on admet que $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ est une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

On rappelle que pour tout couple d'entiers naturels (n, k) , on a : $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

De plus, on pourra utiliser, sans justification, la formule (1) suivante :

$$\text{pour tout couple } (r, s) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } r \leq s, \sum_{j=r}^s \binom{j}{r} = \binom{s+1}{r+1} \quad (1)$$

1. Montrer que la loi de S_2 est donnée par : $S_2(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, et pour tout $k \geq 2$, $P(\{S_2 = k\}) = (k-1)p^2q^{k-2}$.

2. Déterminer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la loi de X_1 conditionnellement à l'événement $\{S_2 = n\}$.

3.a) Déterminer $S_n(\Omega)$.

b) En utilisant la formule (1) et à l'aide d'une démonstration par récurrence sur n , montrer que :

$$\text{pour tout } k \in S_n(\Omega), P(\{S_n = k\}) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

4.a) En utilisant le fait que S_{n-1} est une variable aléatoire, établir l'égalité : $\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-2}{n-2} q^{k-n} = \frac{1}{p^{n-1}}$.

b) Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $k \geq n$, on a : $\frac{n-1}{k-1} \binom{k-1}{n-1} = \binom{k-2}{n-2}$.

c) Soit R_n la variable aléatoire définie par : $R_n = \frac{n-1}{S_n-1}$. Montrer que l'espérance de R_n est égale à p .

5.a) Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, montrer que : $P(\{Y = k\} \cap \{N = n\}) = P(\{S_n = k\}) \times P(\{N = n\})$.

c) Donner pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $k < n$, la valeur de $P(\{Y = k\} \cap \{N = n\})$.

d) Dédire des questions précédentes que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(\{Y = k\}) = \sum_{n=1}^k P(\{S_n = k\}) \times P(\{N = n\})$.

6. On suppose dans cette question que N suit la loi géométrique de paramètre p .
Montrer que Y suit la loi géométrique de paramètre p^2 .

7. On suppose réciproquement que Y suit la loi géométrique de paramètre p^2 .

a) Montrer que $P(\{N = 1\}) = p$.

b) Montrer également que $P(\{N = 2\}) = pq$.

c) À l'aide d'une démonstration par récurrence, montrer que N suit la loi géométrique de paramètre p .