Rapport de jury - Oral Maths II - 2013

Lucas Gerin, Laurent Ménard

9 décembre 2013

Encore une fois nous soulignons le très bon niveau moyen des candidats. Une très grande partie des candidats a obtenu 13 ou plus, ce qui signifie (d'après nous) qu'ils s'épanouiraient parfaitement dans un cursus aussi exigeant en Mathématiques que celui de l'ENSAE. Les notes < 6 sont un signal de grosses lacunes pour le jury d'admission, mais elles ont été attribuées à très peu de candidats.

Quelques remarques ($\star$ signifie que nous avons repris mot pour mot le rapport de 2012) :

- $\star$ **Mauvaise utilisation du "théorème de la bijection".** C'est sûrement un mauvais souvenir de la Terminale, mais beaucoup de candidats (et même des très bons) invoquent un certain "théorème de la bijection monotone" (souvent sans hypothèses) à la place du Théorème des valeurs intermédiaires ou d'une simple étude de fonction.
  Pour montrer que $f : [0,1] \to [0,1]$ continue admet au moins un point fixe, plusieurs répondent "c'est vrai d'après le théorème de la bijection" sans préciser de quelle "bijection" ils parlent. Or ni f ni même $x \mapsto f(x) - x$ n'en sont une !
- **Fonctions de 2 variables.** Ces exercices ont été mieux traités qu'en 2012. Remarquons qu'ils pouvaient se traiter en se ramenant à une fonction d'une variable.
- **Hypothèses dans les théorèmes.** Certains théorèmes d'analyse du programme sont parfois mal énoncés (le Théorème des valeurs intermédiaires, le Théorème des accroissements finis, notamment). Pour certains exercices par exemple, il suffisait d'écrire de façon très précise (avec les bons quantificateurs !) le TAF.
- $\star$ **"Paquets-cadeaux" et hypothèses abusives.** Certains bons candidats récitent des hypothèses de théorèmes comme des "paquets-cadeaux", faisant penser qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils disent. Ce n'est pas grave mais il est bizarre d'entendre que "$x \mapsto \exp(-x^2/2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points". Il n'y a rien d'éventuel là-dedans.
  Plus embêtant : pour calculer l'espérance d'une binomiale, ce n'est pas peut-être pas la peine à chaque ligne de préciser (même à l'oral) "sous réserve de convergence de la somme".
  Pour justifier que f continue avec $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ s'annule, il faut éviter d'insister sur le fait que "f est dérivable", alors que c'est plutôt la continuité qui est importante. Cela peut laisser penser que le candidat ne comprend pas très bien le théorème utilisé.
- **Probabilités.** Une petite remarque qui peut être utile : parfois, on peut s'en sortir en Probabilités même si on ne peut pas faire de calcul explicite. Par exemple en utilisant $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, la linéarité de l'espérance, une majoration un peu brutale dans une somme, etc.

- $\star$ **Lettres grecques.** Un petit détail pour terminer : on pardonne aux candidats de ne pas connaître l'alphabet grec en entier, mais cela fait mauvais genre de confondre ε et δ, α et β...

Questions "bonus"

Dans la plupart des cas, l'examinateur a eu le temps de proposer entre 1 et 4 questions "bonus", indépendantes des deux exercices de la planche. C'est l'occasion d'interroger le candidat sur une autre partie du programme, et ces questions ont souvent été très bien traitées. Ces questions étaient volontairement simples, voici un (petit) échantillon :

Analyse

- Pour quels α la série $\sum |\sin(1/n) - 1/n|^\alpha$ est-elle convergente ?
- Étudier, en fonction du premier terme u_0, la suite définie par $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.
- Comment feriez-vous pour obtenir un bon encadrement de $\sum_{k=1}^n \log(k)$?
- Démontrer que, si ε est suffisamment petit, $x \mapsto x + \varepsilon \sin(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Probabilités

- Soit X une v.a. uniforme, que vaut $\mathbb{E}[\exp(tX)]$ en fonction de t ?
- Si Z suit la loi normale centrée réduite, calculer $\mathbb{E}[|Z|]$.
- Si X suit la loi uniforme, quelle est la loi de $-\log(X)$?
- Quel est la valeur la plus probable pour la loi de Poisson de paramètre λ ?
- Montrer que, pour tout k, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Binom}(n, 1/n) = k) = \mathbb{P}(\mathrm{Poisson}(1) = k)$.
- Quelle est la probabilité qu'une variable aléatoire géométrique de paramètre p soit paire ?