Oral de Mathématiques 1
session de juin 2017

Rapport de jury,
Laurent Duvernet, Nicolas Marie

Voici ci-dessous quelques remarques du jury de Mathématiques 1 (Probabilités et Algèbre) concernant les oraux de juin 2017 :

- La moyenne des notes s'établit à 12 sur 20 avec un écart-type de 3,5. Les notes s'échelonnent entre 4 et 20. Il est à noter que les notes inférieures à 5/20 sont éliminatoires pour l'admission à l'ENSAE.
- Selon la notice de l'épreuve, celle-ci consiste en un oral de 30 minutes, qui est précédé de 30 minutes de préparation. Le format est identique d'ailleurs pour l'oral de Mathématiques 2 (Probabilités et Analyse). L'an dernier, en juin 2016, le jury n'avait proposé à chaque candidat qu'un seul exercice à préparer, et les candidats étaient ensuite interrogés sur cet exercice puis sur un exercice non préparé. Cette année, le jury a préféré s'aligner sur l'oral de Mathématiques 2 qui depuis plusieurs années propose une planche de deux exercices à préparer (de même d'ailleurs qu'à l'oral du concours B/L de l'ENS Ulm). En Mathématiques 1, les deux exercices de chaque planche ont donc consisté cette année systématiquement en un exercice de probabilités et un exercie d'algèbre. Il nous semble que cette solution simplifie la tâche des candidats, qui n'ont donc qu'un seul format d'oral à préparer pour trois oraux : celui de l'ENS Ulm et ceux de Mathématiques 1 et 2 à l'ENSAE.
- Le jury s'est d'ailleurs attaché à partager de manière en gros équitable le temps d'interrogation entre algèbre et probabilités, au détriment de certains candidats qui étaient bien plus à l'aise sur une partie du programme que sur l'autre. Il était assez symptomatique de constater qu'environ trois quarts des candidats consacraient la grande majorité de leur temps de préparation à l'exercice de probabilités — ce qui dans la pratique aboutissait à les faire passer pendant quinze minutes sur un exercice d'algèbre qu'ils avaient peu ou pas préparé.
- La longueur des énoncés des exercices est variable, ce dont le jury est bien conscient au moment de noter les candidats. Certaines planches sont un peu trop longues pour que même les candidats les meilleurs aient vraiment le temps de traiter les deux exercices entièrement et en profondeur. Pour d'autres, bien plus courtes, il est prévu de donner des exercices supplémentaires sans préparation aux candidats qui en viendraient à bout avant le temps imparti.
- La moyenne des notes est légèrement plus faible que pour l'oral de Mathématiques 2 (Probabilités et Analyse), et la variance un peu plus élevée. Cela s'explique sans doute par le niveau très bas en algèbre de quelques uns des candidats les plus faibles, qui peuvent avoir de moins de mal avec un programme d'analyse plus concret.
- Les candidats et les notes se répartissent en gros en trois groupes distincts. Entre 15 et 20, on trouve les candidats qui maîtrisent bien les notions au programme, et qui disposent d'une autonomie suffisante pour aborder seuls la plupart des questions posées, y compris celles qu'ils n'ont pas eu le temps de regarder pendant les 30 minutes de préparation.

Entre 10 et 15, les candidats ne commettent pas en général de contresens majeur sur les notions du programme, mais sont peu autonomes et doivent être accompagnés de manière plus ou moins constante pendant leur oral par l'examinateur pour venir à bout de l'exercice. En dessous de 10, les candidats ne maîtrisent pas certains concepts ou des formes de raisonnement de base, et l'examinateur peine à leur faire voir leur erreur lorsqu'ils prononcent un contresens majeur sur une définition ou un résultat de cours. De très rares candidats en dessous de 5 ont de grandes difficultés avec toutes les questions d'algèbre et de probabilités abordées au cours de l'oral.

— À l'origine des notes les plus faibles, on trouve les points suivants : confusion entre matrice inversible et diagonalisable (au moins cinq candidats), entre vecteur, endomorphisme et scalaire (par ex. écrire xy quand x et y sont des vecteurs et ne pas voir ce qui peut poser problème), incapacité à mener des raisonnements de double inclusion ou de double implication pour montrer une égalité d'ensemble ou une équivalence, etc. En probabilités, les notions d'événements indépendants *vs.* incompatibles ou de fonction de répartition ont donné lieu à des perplexités qui ont surpris le jury, de même que des confusions entre les formules valables dans les cas discret ou à densité.

— Les points moins centraux du programme posent également problème à beaucoup de candidats parmi les plus faibles : on sent que souvent l'impasse a été faite notamment sur les nombres complexes, le dénombrement, les théorèmes limites en probabilité (loi des grands nombres, théorème central-limite), ou encore les calculs de covariance.

— Dans la mesure où le format des oraux de Mathématiques 1 et 2 (Probabilités-Algèbre et Probabilités-Analyse) posent des limites tranchées et un peu artificielles entre les parties du programme, les énoncés proposés tendent à se concentrer sur des raisonnements spécifiquement « probabilistes » ou « algébristes ». Pour le dire autrement, on évite notamment les exercices de probabilités qui ne sont en fait qu'essentiellement du calcul de série ou d'intégrale. Certains candidats ont ainsi dû travailler sur des énoncés de probabilité autour de variables aléatoires dont on ne précisait pas si elles étaient discrètes ou à densité. Cela s'est apparemment révélé très déstabilisant, même chez des candidats qui avaient un bon niveau par ailleurs. Rappelons pourtant un certain nombre de points du programme qui s'appliquent à toutes les variables aléatoires rélles, discrètes, continues, ou autres : fonction de répartition pour identifier la loi, propriétés de l'espérance et de la variance, loi des grands nombres, théorème central-limite.

— Enfin on trouvera dans les pages suivantes deux exemples de sujets proposés en juin 2017.

Oral de Mathématiques 1

Vous trouverez ci-dessous un exercice de probabilités et un exercice d'algèbre. Vous disposez de 30 minutes pour les préparer, puis de 30 minutes de passage lors desquelles on vous interrogera autour de ces énoncés.

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires, indépendantes, de même loi, et telles que $\mathbb{E}\big[|X|\big]< \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer qu'alors

$$\mathbb{E}\big[|X-Y|\big]\leq \mathbb{E}\big[|X+Y|\big].$$

On notera $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement A est réalisé et 0 sinon.

1. Soit T une variable aléatoire de densité f, telle que $\mathbb{P}[T \geq 0] = 1$, et qui admet une espérance. Montrer que $\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}[T > t] = 0$, puis que $\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty \mathbb{P}[T > t]\mathrm{d}t$.
2. Si X est à densité, la variable $X\mathbb{1}_{\{X\geq 0\}}$ est-elle aussi à densité ?
3. On admet dorénavant que les résultats de la première question sont également valables lorsque T n'admet pas de densité. On note $Z = \min\{|X|, |Y|\}$. Montrer que
$$\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\}}] = \int_0^\infty \big(\mathbb{P}[X > t]\big)^2 \mathrm{d}t.$$
4. Conclure. On pourra notamment utiliser l'égalité suivante :
$$\mathbb{E}\big[|X+Y| - |X-Y|\big]= 2\mathbb{E}\big[Z(\mathbb{1}_{\{XY\geq 0\}} - \mathbb{1}_{\{XY<0\}})\big] \tag{1}$$

Exercice 2 Soit n un entier naturel non nul, on note E l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et ϕ l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme $P(X + 1) - P(X)$. On écrira ϕ^0 pour l'application identité de E, et pour $j \in \mathbb{N}^*$, $\phi^j = \phi \circ \phi^{j-1}$.

1. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique. L'application est-elle diagonalisable ?
2. Pour $j \in \mathbb{N}$, donner l'image et le noyau de ϕ^j.
3. Montrer que pour $P \in E$,
$$\phi^n(P)(X) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X + k).$$
4. En déduire la valeur pour $j = 0, \dots, j = n - 1$ du nombre
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^j.$$

Oral de Mathématiques 1

Vous trouverez ci-dessous un exercice de probabilités et un exercice d'algèbre. Vous disposez de 30 minutes pour les préparer, puis de 30 minutes de passage lors desquelles on vous interrogera autour de ces énoncés.

Exercice 1 On se donne une suite de variables aléatoires indépendantes $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$. On suppose que pour chaque n, les variables ε_n ont la même espérance μ_ε et la même variance $\sigma_\varepsilon^2 > 0$. On considère les variables suivantes :

$$X_0 = \varepsilon_0 \text{ et pour } n \geq 1, \quad X_{n+1} = \alpha X_n + \varepsilon_{n+1},$$

où α est un réel de $]-1,1[$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_n pour $n \geq 0$.
2. Pour $n,\ m \geq 0$, que vaut la covariance de X_n avec X_m ?
3. Étudier la convergence en probabilité de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et u un endomorphisme de E. On note u^0 l'identité de E et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u^n = u \circ u^{n-1}$. Enfin si n est un entier naturel, on définit $F_n = \mathrm{Im}(u^n)$ et $G_n = \mathrm{Ker}(u^n)$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $G_n \subset G_{n+1}$, et que s'il existe un entier n tel que $G_n = G_{n+1}$, alors
$$\forall p \in \mathbb{N},\ G_n = G_{n+p}.$$
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$, et que s'il existe un entier n tel que $F_{n+1} = F_n$, alors
$$\forall p \in \mathbb{N},\ F_{n+p} = F_n.$$
3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $F_1 = F_2$
   (b) $G_1 = G_2$
   (c) $F_1 \oplus G_1 = E$.