

# MATHÉMATIQUES

## ÉPREUVE COMMUNE : ÉCRIT

Sylvain Arlot, Matthieu Lerasle

**Coefficient** : 3

**Durée** : 4 heures

**Calculatrice interdite**

### COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Le sujet était composé de trois exercices indépendants et — comme chaque année — proposait aux candidats des questions de difficultés variées en balayant une large part du programme. Il s'agissait en réalité d'un exercice court d'algèbre linéaire (exercice I) et d'un problème en deux parties mêlant analyse (exercice II) et probabilités (exercice III). Les deux parties de ce problème étant pratiquement indépendantes (seule la question III.9, difficile, les combinait), nous avons choisi de le présenter comme deux exercices afin d'encourager tous les candidats à essayer de résoudre les premières questions de l'exercice III, ce qui semble avoir été le cas.

Une attention particulière avait été portée à la progressivité du sujet lors de sa conception. Comme nous l'avons fait dans le rapport d'écrit de l'année précédente, on peut grouper les questions en quatre niveaux de difficulté :

- (1) questions de cours, calculs numériques élémentaires, ou combinaison des deux : I.1, I.4, II.1–2, III.1–2. En les résolvant intégralement, on obtenait 11,5/20. En faisant la moitié de ces questions, on obtenait 7,5/20 (le barème n'est pas linéaire, les premiers points étant plus faciles à obtenir).
- (2) questions d'application du cours classiques, ou demandant des calculs légèrement plus complexes ou abstraits : I.2–3, I.5, II.3, II.7, III.4, III.6. En résolvant intégralement les questions de niveau 1–2, on obtenait 16/20. En faisant la moitié des questions de niveau 1–2, on obtenait 11/20.
- (3) raisonnements courts mais non classiques, ou questions reposant sur la résolution correcte de questions les précédant : I.6, II.4–6, III.3, III.5, III.7–8. En résolvant intégralement les questions de niveau 1–3, on obtenait 19,5/20. En faisant toutes les questions de niveau 1 et la moitié des questions de niveau 2–3, on obtenait 16,5/20.
- (4) raisonnements plus fins et questions difficiles : I.7–8, III.9.

Comme les années précédentes, nous avons corrigé avec plaisir de nombreuses copies abondant avec succès un grand nombre de questions. Ces candidats parfaitement préparés seront — pour ce qui est des mathématiques — d'excellents élèves pour les différentes écoles de la banque.

Le niveau des copies reste extrêmement varié, ce dont témoigne l'écart-type des notes (4,3). En particulier, près de 15% de copies sont pratiquement vides (note inférieure ou égale à 3,5/20). Précisons que pour obtenir 4/20, il suffisait par exemple de calculer correctement le carré et le cube d'une matrice  $3 \times 3$  (I.1) et de résoudre un système linéaire homogène  $3 \times 3$  particulièrement simple (I.4).

TABLE 1. Éléments statistiques de comparaison entre les épreuves écrites de 2012 et 2013. Ces statistiques concernent l'ensemble des candidats inscrits à l'une au moins des écoles de la banque Lettres et Sciences économiques et sociales et présents à l'épreuve de mathématiques. Les copies "vides" sont les copies non blanches mais ayant obtenu la note zéro ; par exemple, celles des candidats s'étant bornés à recopier l'énoncé.

	2012	2013
Candidats présents	580	653
Copies blanches	14 (2,4%)	2 (0,3%)
Copies vides	27 (4,7%)	12 (1,8%)
Notes entre 0 et 1,5	87 (15%)	25 (3,8%)
Notes entre 0,5 et 4,5	123 (21,2%)	140 (21,4%)
Notes entre 10 et 20	223 (38,4%)	271 (41,5%)
Notes entre 16 et 20	26 (4,5%)	34 (5,2%)
Moyenne	7,97	8,67
Écart-type	4,72	4,30
Médiane	8	8,5
Moyenne hors zéros	8,58	8,86
Écart-type hors zéros	4,33	4,15
Médiane hors zéros	8,5	9
Moyenne des notes $\geq 4$	9,82	9,80
Écart-type des notes $\geq 4$	3,5	3,6
Médiane des notes $\geq 4$	9	9,5

Notre sentiment à l'issue de la correction est que les copies étaient (globalement) légèrement meilleures cette année que les années précédentes, ce qui s'est traduit par une augmentation sensible de la moyenne (8,67 contre 7,97).

En regardant de plus près les éléments statistiques à notre disposition (voir le Tableau 1), il nous est apparu que la principale évolution s'est produite parmi les copies les plus faibles. Ainsi, le nombre de copies blanches ou vides a fortement diminué, ainsi que les copies ayant obtenu une note inférieure ou égale à 1,5/20 (25 en 2013 contre 87 en 2012, alors que le nombre de candidats a augmenté). En revanche, la distribution des notes parmi les copies ayant obtenu 4/20 ou plus n'a que très peu évolué. Il semble que seul un mode entre 0 et 1/20 s'est déplacé en un mode entre 3 et 4/20.

Une cause probable de cette évolution est à voir dans les questions les plus faciles, celles de 2012 étant légèrement moins simples que les questions I.1 et I.4 de cette année.

L'analyse de la réussite aux questions de niveau 1 (voir Figure 1) permet d'affiner ce constat en mettant également en évidence des différences entre algèbre linéaire, analyse et probabilités.

Les deux questions les mieux réussies sont (de loin) I.1 et I.4, qui étaient à la fois les plus faciles et dans un domaine (l'algèbre linéaire) dont les bases semblent les mieux maîtrisées par l'ensemble des candidats.

À l'inverse, les questions d'analyse (II.1 et II.2) ont été les moins bien traitées. Cela nous semble inquiétant en particulier pour la question II.1 : il ne s'agissait que d'un tableau de variation (d'une fonction dépendant d'un paramètre, certes) et du tracé d'un graphe (cette fois, sans paramètre libre). Nous insistons sur le fait que ce type de question est particulièrement standard et que les futurs candidats doivent s'attendre à en revoir souvent

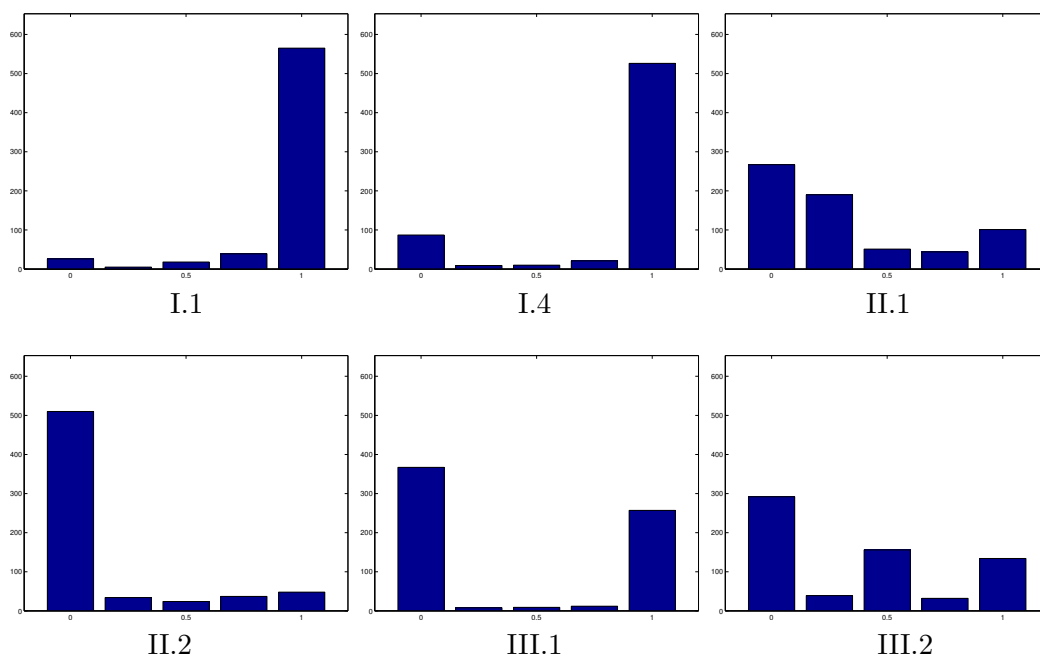


FIGURE 1. Histogramme des notes par question de “niveau 1”.

parmi les questions de niveau 1 dans les années qui viennent. En particulier, nous ferons tracer des graphes aussi souvent que possible.

Pour conclure, nous renouvelons à l’intention des futurs candidats l’avertissement que nous avons donné les années précédentes : fournir un travail minimal en mathématiques afin de résoudre et rédiger correctement toute question de cours ou calcul numérique élémentaire (au moins) suffit à récompenser largement les candidats même les moins à l’aise en mathématiques à l’arrivée en classe préparatoire.

Jusqu’à présent, cela permettait de dépasser le niveau médian des candidats et d’obtenir environ 10/20 à l’écrit de mathématiques, qui correspond à peu près au niveau minimal requis pour avoir une chance d’être admis dans l’une des écoles de la banque. Ainsi, parmi les 227 candidats admissibles ou sous-admissibles à l’ÉNS Paris, seuls 11 (soit moins de 5%) ont obtenu une note strictement inférieure à 7/20 à l’écrit de mathématiques ; parmi les 59 admissibles, 5 seulement y ont obtenu une note strictement inférieure à 10/20 ; et parmi les 25 admis, un seul y a obtenu une note inférieure à 12/20.

Avant de rentrer dans le détail des exercices, voici quelques conseils aux candidats pour la rédaction de leur copie :

- L’épreuve de mathématiques n’est pas un concours de vitesse, mais exige avant tout rigueur et précision. Il importe donc d’accorder la plus grande attention à la rédaction des questions simples du début de chaque exercice pour ne pas y perdre bêtement des points, en particulier pour les candidats les moins à l’aise en mathématiques. Il est forcément délicat de récupérer ces points sur des questions un peu plus difficiles, où l’on demande notamment de s’être approprié les notations et résultats du sujet. Nous détaillons ici les principales attentes du jury quant à la rédaction lors de l’épreuve écrite, ainsi que les erreurs les plus courantes. Une réponse bien rédigée doit montrer *clairement et sans ambiguïté* au correcteur que le candidat a trouvé une démonstration *complète, exacte, sans argument erroné*, n’utilisant *que des résultats au programme et répondant bien à la question posée* (ni plus, ni moins).

- (1) Clarté : la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture sont importantes et peuvent pénaliser (parfois lourdement) des candidats croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant.
  - (2) Ambiguïté : un candidat ne peut pas espérer obtenir des points au bénéfice du doute, ne serait-ce que parce qu'il se trouve toujours une dizaine d'autres copies levant cette ambiguïté (au sein d'une démonstration similaire) par un argument totalement faux. La question II.2 illustre bien ce point : " $I(r)$  converge par Riemann car  $\alpha < 1/2$ " est une réponse ambiguë car on ne pouvait pas deviner si le candidat situait le problème d'intégrabilité en 0, en 1, ou même ailleurs.
  - (3) Démonstration complète : il est souvent rageant de voir une longue démonstration s'arrêtant à un cheveu de la solution. Par exemple, à la question I.4, beaucoup montrent que la seule solution possible est  $(0, 0, 0)$  en raisonnant par implications, mais oublient d'indiquer que  $(0, 0, 0)$  est bien solution (ce qui était totalement évident, donc il suffisait de l'écrire, juste pour mentionner au correcteur qu'on avait bien vu la nécessité logique de vérifier la réciproque).  
Autre oubli courant : lorsqu'on utilise un résultat prouvé dans une question précédente, il faut *toujours* le mentionner au moment où on le fait. Par exemple, dans la deuxième partie de la question I.6, on utilisait I.3. Tous ceux qui ont cru que cela pouvait être considéré comme implicite (ou, plus probablement, qui n'y ont pas pensé) y ont perdu une partie des points.
  - (4) Démonstration exacte : lorsqu'on utilise un résultat du cours, il faut en rappeler les hypothèses (et prouver qu'elles sont bien vérifiées si cela n'est pas évident), sans en ajouter de superflues. Ainsi, à la question III.1, lorsqu'on utilise la linéarité de l'espérance, préciser que les variables sont indépendantes fait perdre une partie des points.
  - (5) Arguments erronés : énoncer une affirmation manifestement fautive ne peut pas servir le candidat, mais seulement jeter la suspicion sur tout ce qu'il écrit (par exemple, " $A$  n'est pas pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  car elle comporte un zéro sur sa diagonale." à la question I.8).
  - (6) Hors-programme : c'est souvent dans des copies assez faibles que l'on voit des candidats faire appel à des notions totalement hors-programme (par exemple, la notion de polynôme annulateur à l'exercice I), qui donnent d'un seul coup la réponse aux trois-quarts de l'exercice, mais ne rapportent aucun point.
  - (7) Répondre à la question posée : il est courant de voir des copies arrivant à un résultat plus fort que ce qui est demandé, et où le candidat a oublié de mentionner que le résultat demandé en est un corollaire immédiat. C'est d'autant plus dommage que le plus souvent, toutes les vraies difficultés de la question ont été résolues. Par exemple, à la question I.2, obtenir (par un long calcul) une formule exacte pour  $A^{-1}$  était d'une part parfaitement inutile pour la fin de cette question, et d'autre part insuffisant pour la première partie de la question si l'on n'écrivait pas "donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \dots$ ". En mathématiques, il est plus important de savoir ce que l'on fait que de savoir faire des calculs de manière mécanique, un ordinateur étant nettement plus performant qu'un humain pour le second point.
- Trop de candidats encore ont perdu des points par manque de recul ou par malhonnêteté (les deux étant indistinguables à l'écrit), même si nous avons apprécié une amélioration générale des copies sur ce point en comparaison des années précédentes. Nous encourageons les futurs candidats à faire l'effort de vérifier la cohérence de leurs résultats et à signaler honnêtement toute incohérence qu'ils n'arrivent pas à

corriger sur leur copie. Autant le jury est très magnanime avec un candidat honnête (même s'il aura nécessairement moins de points qu'un candidat ayant une réponse parfaite), autant une tentative d'"arnaque" (réelle ou supposée) fait très mauvaise impression et a des répercussions négatives sur la notation tout au long de la copie : les moindres ambiguïtés risquent alors systématiquement d'être interprétées comme une erreur réelle.

Au-delà de l'impression laissée sur le jury, ne pas vérifier la cohérence des résultats fait surtout perdre l'occasion de corriger une erreur de calcul. Parmi les candidats ayant repéré une incohérence, nous voyons la grande majorité finir par corriger leur erreur, et seul un petit nombre se limiter à mentionner qu'ils ont probablement fait une erreur quelque part.

Par exemple, à la question I.1, se tromper dans  $A^3$  mais obtenir  $P(A) = 0$  montre que le candidat n'a pas réellement calculé  $P(A)$ , le résultat ayant été donné dans l'énoncé.

À la question II.1, tracer un graphe passant sous l'axe des abscisses témoigne d'un total manque de recul, la fonction étudiée étant de toute évidence positive. À la question III.2, obtenir  $v_n < 0$  laisse planer de graves doutes sur les connaissances relatives à la variance d'une variable aléatoire.

- De nombreux candidats semblent vouloir à tout prix écrire des équivalences (sans les justifier), sans même se demander si elles sont vraies. On a ainsi lu que  $P(A) = 0 \Leftrightarrow P(A)V = 0$  à la question I.2. De telles erreurs logiques pénalisent fortement ces candidats, d'autant plus qu'elles jettent un doute sur les équivalences correctes mais écrites sans justification tout au long de la copie.
- Plusieurs questions de l'énoncé (I.5, II.5, II.6) évoquaient "une constante", ce que tous les candidats n'ont pas compris correctement. Il s'agit simplement d'un nombre réel ne faisant pas intervenir les paramètres libres du problème ( $\lambda$  à l'exercice I,  $r$  à l'exercice II, etc.).
- Quelques dizaines de candidats semblent mal à l'aise avec les lettres grecques, pourtant d'usage extrêmement courant en mathématiques. Ainsi, beaucoup écrivent  $y$  pour  $\gamma$  (à l'exercice III), tandis que d'autres écrivent  $\ell$  pour  $\lambda$ . À l'écrit, il suffit pourtant de recopier le caractère imprimé sur le sujet, de telles erreurs étant assez gênantes lors de la correction.
- Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses à un même exercice soient présentées dans l'ordre, et qu'en tout cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire ! Comme chaque année, quelques candidats dont le niveau paraissait assez bon ont perdu des points parce que le jury n'arrivait pas toujours à lire les mots et les formules qu'il écrivait.
- Recopier une question de l'énoncé ne peut jamais rapporter de point et demeure parfaitement inutile.

Comme les années précédentes, en vue de préciser notre analyse des principales faiblesses observées dans les copies, nous indiquons pour chaque question le nombre de copies ayant obtenu au moins 75% des points, sur un total de 653 copies.

#### COMMENTAIRES DÉTAILLÉS SUR CHAQUE EXERCICE

**Exercice I.** Le premier exercice portait sur la diagonalisabilité d'une matrice  $3 \times 3$  à coefficients numériques réels, à l'aide du polynôme minimal (mais sans utiliser aucun résultat sur cette notion qui n'est pas au programme). Cet exercice a été le plus réussi par les candidats : 53% des points ont été obtenus dans cet exercice, alors que le barème total lui en attribuait un tiers (et seulement 20% si l'on met de côté les questions 7–8 très difficiles qui n'ont rapporté des points qu'à une vingtaine de candidats).

1. [578 copies  $\geq 75\%$ ] Comme il s'agissait uniquement de calculer deux produits de matrices  $3 \times 3$  à coefficients entiers, cette question a été particulièrement réussie, et seuls 26 candidats n'ont obtenu aucun point. La seule vraie erreur (heureusement rare) a été de croire qu'élever une matrice au carré revient à élever chacun de ses coefficients au carré!

Nous regrettons tout de même que la grande majorité des candidats ayant fait une petite erreur de calcul (un ou deux coefficients incorrects dans  $A^3$ ) arrivent tout de même à la conclusion que  $P(A) = 0$ , alors que c'était justement l'occasion de vérifier le calcul précédent. Une telle incohérence (si ce n'est de la malhonnêteté) fait très mauvais effet sur le correcteur qui constate dès la première question ne pas pouvoir faire confiance au candidat sur le moindre calcul.

2. [239 copies  $\geq 75\%$ ] La question précédente ( $P(A) = 0$ ) permettait d'arriver rapidement à la réponse, ce que très peu de candidats ont réalisé immédiatement. La grande majorité des réponses correctes commencent par prouver l'inversibilité via un calcul de rang ou un pivot de Gauss (parfois sur plusieurs pages), puis utilisent que  $P(A) = 0$  pour la deuxième partie de la question.

Malheureusement, les preuves de l'inversibilité de  $A$  ont souvent été émaillées d'erreurs, soit dans les calculs menant à une formule pour  $A^{-1}$  (qui n'était pas demandée), soit (plus grave) en écrivant que "les colonnes de  $A$  sont libres deux à deux, donc  $A$  est inversible". Dans quelques copies très faibles, on a vu utiliser les notions de déterminant et de matrice des cofacteurs pour aboutir à une formule complètement fautive pour  $A^{-1}$ . D'autres candidats ont cherché à exprimer  $A^{-1}$  sous la forme  $aA + bA^2$ .

3. [203 copies  $\geq 75\%$ ] Il s'agissait ici de montrer que toute valeur propre de  $A$  est racine d'un polynôme annulateur de  $A$ , bien sûr sans invoquer cette notion qui est hors-programme. Les rares candidats ayant écrit ici "polynôme annulateur" ne se sont d'ailleurs pas montrés capables de prouver ce résultat.

Les "deux manières" de calculer  $P(A)V$  demandées par l'énoncé étaient une indication pour mener au fait que  $0 \cdot V = P(\lambda)V$ , que plusieurs candidats ont visiblement mal comprise, s'efforçant de prouver de deux manières différentes que  $P(\lambda) = 0$ . Cela les a conduit à proposer deux preuves extrêmement similaires, voire identiques.

Plus grave, un nombre important de candidats a mélangé ici matrices, vecteurs et scalaires, écrivant par exemple  $A^3V = (AV)^3$ ,  $P(AV) = P(A)V$ ,  $P(A)V = VP(A)$ ,  $P(A) = P(\lambda)$ ,  $P(A)V = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$  ou encore " $A = \lambda V$  donc  $P(A) = P(\lambda V) = P(\lambda)P(V)$ ".

4. [540 copies  $\geq 75\%$ ] Deuxième question la plus réussie des candidats (une centaine seulement n'y obtenant aucun point), il s'agissait de résoudre un système linéaire homogène  $3 \times 3$  avec des coefficients entiers. Étonnamment, quelques candidats (dont la copie était très légère) ont trouvé des ensembles de solutions ne contenant pas le vecteur nul. L'erreur la plus courante était de raisonner par implication sans vérifier à la fin que le vecteur nul est bien solution (c'est évident, mais il faut l'écrire). Certains ont payé plus cher cet oubli car ils avaient obtenu (par implication)  $\text{Vect}(3, 1, 1)$  comme ensemble de solutions possibles. On a parfois lu des réponses mal écrites telles que "les solutions sont  $x = 0, y = 0, z = 0$ " ou bien " $\mathcal{S} = \{0, 0, 0\}$ ".

5. [80 copies  $\geq 75\%$ ] La question présentait deux difficultés principales : savoir effectuer un pivot de Gauss (une méthode par substitution, même parfaitement justifiée, ne pouvait rapporter tous les points, contrairement à la question I.4 où la méthode de résolution était laissée au choix des candidats), et savoir raisonner avec un paramètre libre (ici,  $\lambda$ ).

Pour le premier point, il fallait notamment écrire explicitement les opérations effectuées sur les lignes à chaque étape.

Sur le second point, de nombreux candidats n'ont jamais utilisé explicitement dans leur raisonnement l'hypothèse  $\lambda = 2$ , ce qui aurait dû leur indiquer qu'ils avaient oublié une justification quelque part. Cet oubli était le plus souvent commis par ceux qui écrivaient " $L_3 \leftarrow (2 - \lambda)L_3 - (3 - 2\lambda)L_2$ " comme dernière transformation, où la nécessité de l'hypothèse  $\lambda \neq 2$  (pour raisonner par équivalence) apparaît moins clairement que lorsqu'on écrit " $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3-2\lambda}{2-\lambda}L_2$ ".

Enfin, beaucoup de candidats ont proposé  $2 - \lambda$  comme valeur de la constante  $c$ . Comme indiqué dans les remarques générales, "une constante" signifie qu'on attend une quantité ne dépendant pas de paramètres libres tels que  $\lambda$  ("une constante numérique" aurait peut-être été plus clair ici).

6. [88 copies  $\geq 75\%$ ] La première partie de la question nécessitait de distinguer les cas  $\lambda \neq 2$  (en utilisant la question 5) et  $\lambda = 2$ . L'erreur la plus courante ici était d'utiliser la question 5 comme si l'on n'y avait pas supposé  $\lambda \neq 2$ .

Dans le cas  $\lambda \neq 2$ , il est faux d'écrire qu'un système de deux équations à trois inconnues admet une infinité de solutions. Ce n'était le cas ici que parce que les deux équations ne sont pas liées et parce que le second membre est nul (sinon, il aurait fallu vérifier l'existence d'une solution). Certains se sont inutilement compliqué la tâche en cherchant des solutions  $(x, y, z)$  telles que  $x \neq 0, y \neq 0$  et  $z \neq 0$ , devant alors considérer le cas  $\lambda = 1$  séparément.

La seconde partie de la question ne présentait qu'une difficulté principale, d'ordre logique : savoir prouver rigoureusement l'égalité de deux ensembles, c'est-à-dire ici démontrer une équivalence. Le plus simple était d'invoquer la question 3 (souvent oubliée) et la première partie de la question 6.

Certains ont préféré reprouver l'équivalence à partir de la question 5. C'était possible si l'on traitait bien le cas  $\lambda = 2$  séparément (en calculant  $P(2)$  et en utilisant la question 4). Quelques uns y ont échoué car ils ont confondu ici réciproque et contraposée, prouvant au final deux fois la même implication et croyant en déduire une équivalence.

7. [1 copie  $\geq 75\%$ ] La question (i) était très difficile sans calculatrice, et n'a été convenablement abordée que par une poignée de candidats dont nous avons largement valorisé les efforts, même lorsqu'ils finissaient par commettre une erreur dans l'évaluation du signe de  $P((1 \pm \sqrt{22})/3)$ . Le barème prenait en compte ici le temps nécessaire pour résoudre cette question.

De nombreux candidats ont tenté de résoudre (ii) sans avoir la réponse au (i), écrivant qu'un polynôme de degré trois possède toujours trois racines dans  $\mathbb{C}$  (ajoutant parfois "une racine dans  $\mathbb{R}$ ") ! Ils n'ont bien sûr obtenu aucun point ici (ni à la question 8ii), bien qu'ayant "deviné" la bonne réponse. Une réponse n'utilisant pas (i) était possible ici, mais nécessitait un raisonnement assez fin par disjonction des cas, en s'appuyant notamment sur le fait que  $P$  est à coefficients réels.

Mentionnons enfin quelques candidats mélangeant totalement les solutions  $(x, y, z)$  du système  $(L)$  et les "solutions"  $\lambda$  telles  $(L)$  possède des solutions non-nulles, allant parfois jusqu'à nous proposer une base de l'ensemble des racines de  $P$ .

8. [5 copies  $\geq 75\%$ ] Cette question était difficile (voire impossible à résoudre) sans avoir obtenu la réponse à la question 7. Il était toutefois parfaitement possible de proposer ici une réponse en distinguant les cas possibles en fonction de la réponse à la question 7, ce que quelques candidats ont fait avec succès. Une telle réponse parfaitement rédigée permettait d'obtenir la totalité des points à cette question. À l'inverse, toute tentative de "grapillage" (ne se préoccupant pas des différents cas possibles, ou s'appuyant sur le raisonnement faux le plus courant pour 7ii) ne rapporte rien, pas plus que la simple définition de "diagonalisable".

Parmi la centaine de candidats qui ont tenté la question 8, la plupart ont semblé troublés par la question de la diagonalisabilité dans  $\mathbb{C}$  : soit ils ont proposé une

réponse (fausse) dans  $\mathbb{R}$  mais pas dans  $\mathbb{C}$ , soit ils ont écrit des bêtises telles que “Toute matrice est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ ” ou “ $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{C})) > 3$ ” (sans compter ceux qui avaient répondu que tout polynôme de degré 3 possède 6 racines dans  $\mathbb{C}$  à la question 7).

Enfin, nous sommes encore perplexes face à la réponse suivante proposée par un candidat, sans plus d’explications : “ $A$  n’est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  car elle comporte un zéro sur sa diagonale. Mais elle est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .”

**Exercice II.** Le deuxième exercice visait à déterminer un équivalent quand  $r \rightarrow +\infty$  de l’intégrale (impropre) d’une fonction dépendant du paramètre  $r$ . Le tracé initial pouvait permettre de visualiser que l’essentiel de la surface sous la courbe était obtenue pour les  $x$  voisins de zéro, intuition que les six questions suivantes justifiait rigoureusement.

Nous avons été déçus par la faible réussite des candidats dans cet exercice, dont le niveau de difficulté ne dépassait pas beaucoup celui des six premières questions de l’exercice I. En effet, 23% des points ont été obtenus dans cet exercice, le barème total lui en attribuant 24%, soit moins que les questions I.1–6 (sur lesquels deux fois plus de points ont été obtenus). Doit-on en déduire que le niveau général des candidats est plus faible en analyse qu’en algèbre linéaire ? C’est en tout cas notre constat sur l’épreuve de cette année, du moins sur les questions les plus faciles.

L’exercice faisant intervenir la fonction  $x \rightarrow 1/\sqrt{1-x}$ , on a souvent lu (aux questions 2 et 6) que la primitive de  $x \rightarrow 1/\sqrt{1-x}$  est arcsin (et parfois arctan).

1. [126 copies  $\geq 75\%$ ] Pour tracer le tableau de variations, la principale difficulté est de savoir raisonner avec le paramètre  $r$  libre, ce qui a semble-t-il suffit à décourager bon nombre de candidats (près de 300 n’ont obtenu aucun point ici!). Parmi ceux qui ont obtenu une formule correcte pour la dérivée, nombreux ont été trompés par leur habitude d’écrire des équivalences sans réfléchir, écrivant ainsi que  $-2r(1-x) \geq -1 \Leftrightarrow 1-x \leq \frac{1}{2}$  (car  $r \geq 1$ ) pour trouver un minimum  $1/2$  au lieu de  $1 - 1/(2r)$ . Précisons enfin que le tableau de variation était incomplet sans la valeur en 0 et la limite en 1.

Nous avons été extrêmement surpris du petit nombre de graphes (même extrêmement sommaires) tracés parmi les candidats ayant obtenu un tableau de variations. Beaucoup ont ainsi perdu des points faciles à obtenir, peut-être simplement pour avoir lu l’énoncé trop rapidement ?

Précisons enfin qu’un graphe sommaire doit tout de même posséder les principales propriétés qualitatives de la fonction qu’il s’agit de tracer : domaine de définition (on a vu quelques courbes débordant du domaine  $[0, 1]$ , parfois traversant la droite  $x = 1$ ), sens de variation, valeurs remarquables (valeur en 0, limite en 1, et la position approximative du minimum :  $15/16$  ne doit pas être placé plus près de 0 que de 1, et la valeur minimale est clairement proche de 0), régularité (pas d’angle au niveau du minimum!). Une fois ces contraintes respectées (pour moins de cinquante copies!), nous avons apprécié de voir une courbe ne partant ni horizontalement ni verticalement en  $x = 0$ , et pas totalement linéaire sur  $[0, 15/16]$ .

2. [70 copies  $\geq 75\%$ ] Comme le montre clairement la Figure 1, cette question a été particulièrement mal traitée par les candidats. Le paramètre libre  $r$  n’interférant en rien avec l’intégrabilité de  $f_r$  en 1, cela nous semble particulièrement grave.

Très souvent, les candidats montraient que  $f_r$  est prolongeable par continuité en 1, ou bien ne se posaient la question de l’intégrabilité qu’en 0 (voire en  $+\infty$ ). Remarquons également que si l’on passe par une intégration par parties, il ne faut pas écrire d’emblée les intégrales sur  $[0, 1]$  et attendre la fin du calcul pour faire tendre la borne supérieure de l’intervalle d’intégration vers 1.

Précisons que pour rédiger correctement la réponse, il est indispensable de préciser que c’est en 1 que l’on se pose la question de la convergence de l’intégrale. Au vu du



nombre de candidats ne se posant la question qu'en 0, il est impossible d'accorder le bénéfice du doute à ceux qui se sont contentés d'écrire " $I(r)$  converge par Riemann car  $\alpha < 1/2$ ".

Mentionnons enfin que l'égalité  $I = I_1 + I_2 + I_3$  n'était pas à prouver, elle était donnée par l'énoncé ; certains ont perdu un peu de temps en cherchant à la justifier ici.

3. [147 copies  $\geq 75\%$ ] A priori légèrement plus difficile que la question précédente, cette question a été largement mieux réussie. Les principales erreurs étaient calculatoires, de nombreux candidats faisant apparaître  $\exp(-r^{5/3})$  ou  $\exp(-r^{-1/3})$  au lieu de  $\exp(-r^{1/3})$ . Dans le second cas, le plus grave était peut être d'écrire ensuite que  $\exp(-r^{-1/3})$  tend vers zéro lorsque  $r$  tend vers l'infini. Certains enfin écrivent que  $\exp(-r^{1/3}) = (\exp(-1/r))^{1/3}$ . Notons, comme à la question 7, la confusion qui existe entre limite et développement limité, il est faux ainsi d'écrire " $\lim_{r \rightarrow \infty} I_1(r) = \frac{1}{r}(1 + o(1))$ ".

4. [37 copies  $\geq 75\%$ ] La première inégalité était pratiquement évidente avec la croissance de  $y \rightarrow 1/\sqrt{1-y}$ , mais beaucoup de candidats ont perdu du temps avec de longues études de fonctions (parfois plusieurs pages), et n'ont pas toujours fait attention à exclure  $y = 1$  de leur étude.

Pour la deuxième inégalité, on pouvait appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction  $x \rightarrow 1/\sqrt{1-x}$  sur  $[0, y]$ , ce que pratiquement aucun candidat n'a fait. La méthode la plus employée avec succès était une simple étude de fonctions, dans laquelle l'erreur la plus courante était de dériver  $1/\sqrt{1-y}$  en  $-1/(2\sqrt{1-y})$ .

En revanche, les tentatives de raisonnement par manipulation d'inégalités sont toujours arrivées au résultat demandé via une erreur de calcul. Idem pour les raisonnements par équivalence en partant de la solution. Cela semble inévitable après une vingtaine de manipulations aléatoires, qui témoignent de la confusion régnant dans l'esprit de ces candidats lorsqu'il s'agit de prouver une telle inégalité.

5. [11 copies  $\geq 75\%$ ] La coquille dans l'énoncé (il fallait lire " $r > 1$ ") n'a semble-t-il perturbé aucun candidat ; un seul a cru bon de distinguer le cas  $r = 1$  au sein d'un raisonnement impeccable, obtenant tous les points ici et une excellente note finale. Quelques "fanatiques des équivalences" continuent d'en mettre ici lorsqu'ils intègrent une inégalité, perdant (encore) bêtement quelques points.

6. [5 copies  $\geq 75\%$ ] La méthode la plus simple était de majorer  $\exp(-rx)$  par  $\exp(-r^{1/3})$  sur l'intervalle d'intégration. Un candidat a également obtenu la solution via une intégration par parties. En revanche, utiliser la question 4 ne mène à rien : on obtient une intégrale non-convergente.

Non sans malice, un candidat propose ici  $c_3 = 10^{1000000000000000000000000}$  sans aucune preuve ; deviner une valeur de  $c_3$  qui rend l'énoncé vrai ne suffit pas à obtenir des points.

7. [16 copies  $\geq 75\%$ ] Bien qu'il s'agissait de la fin d'un exercice, la question posée ici était assez simple : il suffisait de combiner les réponses (données dans l'énoncé) aux questions 3, 5 et 6. Parmi les 150 candidats environ qui l'avaient repérée, plus de 80% n'ont fait que montrer leurs lacunes sur les notions de limite, d'équivalent et d'écritures à base de  $o(\cdot)$ . En effet, la grande majorité des réponses se résument à " $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_2(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} I_3(r) = 0$  donc  $\lim_{r \rightarrow +\infty} (I_1(r) + I_2(r) + I_3(r)) = \lim_{r \rightarrow +\infty} I_1(r)$  donc  $I(r) \equiv 1/r$ ", certains allant même jusqu'à écrire " $\lim_{r \rightarrow +\infty} I(r) = 1/r$ " ou bien affirmer qu'une constante "est négligeable devant  $1/r$  lorsque  $r$  tend vers l'infini".

**Exercice III.** Le troisième exercice portait sur l'estimation par une moyenne mobile de l'espérance commune d'une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On y considérait successivement plusieurs valeurs pour le "poids"  $\gamma_n$  donné à la dernière observation  $X_n$  dans l'estimateur  $M_n$ , menant à la moyenne empirique (question 2), à

l'étude d'une suite arithmético-géométrique (question 3) puis faisant apparaître l'intégrale étudiée à l'exercice II (questions 7–9). Notons que les raisonnements des questions 7–9 s'adaptent sans difficulté pour traiter le cas général  $\gamma_n = n^{-\alpha}$  avec  $\alpha \in ]0, 1[$ .

Cet exercice a été globalement le moins réussi par les candidats : 24% des points ont été obtenus dans cet exercice, alors que le barème total lui en attribuait 42%. Ce n'est pas une surprise en raison de sa position en fin de sujet, et surtout du fait que les questions 7–9 étaient d'un niveau de difficulté élevé et ont été plus rarement tentées par les bons candidats que les questions finales des exercices I et II. Ainsi, l'essentiel des points obtenus dans cet exercice l'ont été sur les questions 1–6, auxquelles le barème total attribuait 19% des points. Ces questions ont donc été un peu mieux réussies que les questions de difficulté comparable de l'exercice II.

Plusieurs des premières questions se résolvaient par récurrence (1, 2a, 4 et éventuellement 5), ce que de nombreux candidats ont su faire correctement. Il ne fallait pas croire pour autant que toutes les questions de cet exercice pouvaient s'aborder par récurrence : plusieurs candidats n'ayant visiblement que cette idée en tête l'ont essayée pour les questions 2b, 6, 7 et 8, en pure perte. L'erreur la plus courante dans les récurrences concerne les candidats initialisant leur raisonnement avec  $n = 2$  lorsqu'on demandait un résultat valable pour tout  $n \geq 1$ . Même lorsque le cas  $n = 1$  est évident, il faut l'écrire, sous peine de perdre bêtement quelques points. D'autres ont seulement perdu du temps en considérant  $n = 1$  et  $n = 2$  pour l'initialisation. Plusieurs candidats ont aussi perdu quelques points à cause d'une mauvaise rédaction. Par exemple, pour démontrer l'hérédité, on ne suppose pas la propriété vraie "pour tout  $n$ ", sans quoi il n'y a rien à prouver, ni qu'"il existe un  $n$  pour lequel elle est vraie", puisqu'on vient de le montrer en initialisant la récurrence. Enfin, il serait bon d'éviter d'écrire "OK" sur la copie quand on a terminé une preuve.

1. [266 copies  $\geq 75\%$ ] Avec la première partie de la question 2, il s'agit de la question la mieux réussie par les candidats dans l'exercice III. Une récurrence était ici absolument indispensable. Les candidats (assez nombreux) qui ont tenté de s'en passer n'ont obtenu la formule demandée qu'en profitant d'une confusion entre  $X_{n-1}$  et  $M_{n-1}$ , ou bien en affirmant directement que " $M_n$  est une fonction de  $X_1, \dots, X_n$  donc  $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X_n) = \mu$ ", formule magique qui mettrait les probabilistes au chômage si elle était vraie.

Une poignée de candidats ont bêtement perdu des points ici en invoquant l'indépendance pour justifier la linéarité de l'espérance :  $M_{n-1}$  et  $X_n$  étaient effectivement indépendantes, mais on attend des candidats qu'ils n'ajoutent pas d'hypothèses superflues lorsqu'ils utilisent un résultat de leur cours dans une preuve.

2. [160 copies  $\geq 75\%$ ] La première partie a été très bien réussie parmi les candidats tentant une récurrence. Un raisonnement direct était possible, mais très périlleux, car exigeant une rédaction impeccable, ce qui fut malheureusement très rare parmi les candidats ayant choisi cette voie.

Le calcul de la variance a montré les lacunes de nombreux candidats sur la question (de cours) de la variance d'une somme de variables indépendantes. C'est d'autant plus impardonnable qu'il s'agissait ici de la variance de la moyenne empirique  $M_n$  de variables i.i.d., calcul que tous les candidats ont vu dans leur cours ou en exercice d'application directe. Ainsi, beaucoup oublient de mentionner l'indépendance des  $X_i$  et parlent de "linéarité de la variance", certains obtenant quand même le bon résultat ! D'autres écrivent que " $\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(nX_1)$  car les  $X_i$  suivent la même loi", voire que " $\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1)^n$  par indépendance". Beaucoup moins grave, quelques-uns écrivent "identiques" au lieu de "identiquement distribuées", à propos de  $X_i$ .

Plusieurs candidats ont remarqué ici que  $v_n = \gamma_n$ , ce qui les a parfois induit en erreur à la question 3. On peut prouver (c'était l'objet de la fin de l'exercice) que  $v_n$  et  $\gamma_n$

sont du même ordre de grandeur lorsque  $\gamma_n = Cn^{-\alpha}$ , mais il n'y a d'égalité que dans le cas particulier  $\gamma_n = 1/n$ .

3. [40 copies  $\geq 75\%$ ] Plus difficile que les deux précédentes, cette question demandait un peu d'initiative aux candidats. Il y avait essentiellement deux méthodes. Le plus simple était d'écrire la relation de récurrence vérifiée par  $v_n$  puis d'étudier la suite (arithmético-géométrique). Certains ont choisi une autre voie en prouvant d'abord une formule close pour  $M_n$  (on pouvait la deviner en lisant le résultat de la question 4) puis en calculant la variance (avec le raisonnement de la question 6), dans laquelle on reconnaissait une somme de série géométrique. Il était plus délicat d'arriver sans erreur au résultat de cette manière, mais quelques-uns y ont réussi.  
Avec la première méthode, c'était bien de reconnaître que  $v_n$  est arithmético-géométrique, mais encore fallait-il savoir en faire quelque chose : soit deviner la limite  $\ell$  et remarquer que  $v_n - \ell$  est géométrique de raison  $(1 - \varepsilon)^2 \in ] - 1, 1[$ , soit remarquer que  $v_n - v_{n-1}$  est géométrique de raison  $(1 - \varepsilon)^2 \in ] - 1, 1[$  et invoquer la convergence de la série géométrique.
4. [132 copies  $\geq 75\%$ ] Comme pour la question 2a, une approche par récurrence était largement plus facile à rédiger convenablement. Quelques candidats, heureusement assez rares, raisonnent ici avec  $\gamma_k = 1/k$ .
5. [20 copies  $\geq 75\%$ ] Sans surprise, cette question demandant un peu d'astuce a été peu abordée. Le plus rapide était de comparer les formules découlant respectivement des questions 1 et 4 pour l'espérance de  $M_n$ , en faisant attention à justifier convenablement le fait qu'on peut diviser par  $\mu$  de chaque côté, puisqu'on peut très bien avoir  $\mu = 0$ . Une autre approche, plus longue et très technique, était de partir de la formule de la question 4 uniquement et de montrer par récurrence que la somme vaut 1, ce qu'un petit nombre de candidats ont su faire.  
Signalons également plusieurs réponses fantaisistes utilisant  $\frac{(1-\gamma_n)!}{(1-\gamma_k)!}$ .
6. [70 copies  $\geq 75\%$ ] La dernière question accessible à la grande majorité des candidats demandait surtout de repérer que ce n'était qu'une question de cours grâce à la formule donnée à la question 4 (que l'on pouvait admettre). Comme à la question 2b (et même un peu plus fréquemment), de nombreux candidats oublient de mentionner l'indépendance des  $X_k$ .
7. [19 copies  $\geq 75\%$ ] La grande majorité des (bons) candidats qui ont tenté cette question en sont venus à bout.
8. [14 copies  $\geq 75\%$ ] Il s'agissait d'une version adaptée au problème de l'inégalité très classique  $e^x \geq 1 + x$ . Mais aussi classique soit-elle, cette inégalité ne peut être considérée comme une évidence ou un résultat du cours, la moitié du travail ici était précisément de la prouver (et l'on ne peut pas invoquer une inégalité de convexité, hors-programme).  
La plupart des candidats ont commencé par passer au logarithme (pour se ramener à  $\ln(1 + x) \leq x$ ), il fallait alors faire attention à traiter séparément le cas  $n = 1$ .
- 9.a [2 copies  $\geq 75\%$ ] Très peu de candidats ont abordé cette majoration, qui demandait une certaine aisance dans des calculs techniques.
- 9.b [aucune copie  $\geq 75\%$ ] Presque aucun candidat n'a tenté cette question, où il fallait penser à une comparaison série-intégrale (ce qu'ont fait une poignée de candidats) et la mener au bout (en utilisant ici la question 1 de l'exercice II).
- 9.c [6 copies  $\geq 75\%$ ] Quelques candidats ont repéré ici que le résultat se déduisait de (9b) et de la question 7 de l'exercice II.
- 9.d [aucune copie  $\geq 75\%$ ] Question jamais abordée sérieusement.