4

Option B/L

Exercice 4.01.

Soit U une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur $[0,1[$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer la loi de $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

2. Déterminer la loi de $X = \lfloor V \rfloor + 1$, où $\lfloor V \rfloor$ désigne la partie entière de V.

On pose $M = V - \lfloor V \rfloor$.

3. a) Sans déterminer la loi de M, calculer l'espérance de M.
   b) Déterminer une densité de M.

4. a) Déterminer la fonction de répartition de $C = \min(1, V)$.
   b) La variable aléatoire C est-elle discrète ? à densité ?

5. Vérifier que $P(2V^2 - 3V \geqslant -1) \geqslant \dfrac{3}{4}$.

Solution :

1. On a $V(\Omega) = [0, +\infty[$ et $\forall\, v \geqslant 0$, $F_V(v) = P(V \leqslant v) = P(U \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda v}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda v}$ (car $1 - \mathrm{e}^{-\lambda v} \in [0,1[$). Ainsi, $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

2. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X = n) = P(n-1 \leq V < n) &= \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)} - \mathrm{e}^{-\lambda n} = \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) \\ &= p(1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

en posant $p = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

3. a) On a $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})$, donc $E(X) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$.

Par linéarité, $\lfloor V\rfloor = X-1$ admet une espérance et
$$E(\lfloor V\rfloor) = E(X)-1 = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}$$
De plus, $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, donc $E(V) = \dfrac{1}{\lambda}\cdot$

La variable aléatoire M admet donc une espérance et par linéarité, $E(M) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}\cdot$

b) On a $M(\Omega) = [0,1[$ et pour $m \in [0,1[$, on calcule $F_M(m)$ grâce au système complet d'événements $\{[X=n]\}_{n\in\mathbb{N}^*}$:
$$\begin{aligned}F_M(m) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([M \leqslant m]\cap[X=k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k-1 \leqslant V \leqslant m+k-1)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)} - \mathrm{e}^{-\lambda(m+k-1)}) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda m}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}\end{aligned}$$
En dérivant F_M sur $]0,1[$, on obtient une densité g de M :
$$g(t) = \begin{cases}\dfrac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
4. a) On a $C(\Omega) =]0,1]$ et :

- pour $c \leqslant 0$, $P(C\leqslant c) = P(V \leqslant c) = 0$;
- pour $c \in]0,1[$, $P(C\leqslant c) = P(V\leqslant c) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda c}$;
- pour $c \geqslant 1$, $P(C \leqslant c) = 1$.

b) C n'est pas une variable à densité car $P(C=1) = \mathrm{e}^{-\lambda}$ est non nulle mais n'est pas une variable discrète car elle ne charge que le point 1.

5. Il vient :
$$\begin{aligned}[2V^2-3V \geqslant -1] &= [2V^2-3V+1 \geqslant 0] = [(V-1)(2V-1)\geqslant 0]\\ &= [V\geqslant 1]\cup[V \leqslant \tfrac{1}{2}]\end{aligned}$$
La réunion étant disjointe, il vient :
$$P([2V^2-3V\geqslant -1]) = P([V\geqslant 1]) + P([V\leqslant \tfrac{1}{2}]) = \mathrm{e}^{-\lambda} + 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$$
En posant $x = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$ et en étudiant la fonction $x \mapsto x^2-x+1$ sur $]0,1]$, on montre facilement que $P(2V^2-3V\geqslant -1) \geqslant \dfrac{3}{4}$.

Exercice 4.02.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $f\in E$, on définit la fonction $T(f)$ par :
$$\big(T(f)\big)(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x>0\\ f(0) & \text{si } x=0\end{cases}$$
1. Montrer que la fonction $T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x>0$, calculer $x\big(T(f)\big)'(x) + \big(T(f)\big)(x)$.

2. a) Montrer que la fonction $T(f)$ est continue en 0.

b) Montrer que T est un endomorphisme de E.

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de T s'il existe $f \in E, f \neq 0$ telle que $T(f) = \lambda f$. La fonction f s'appelle alors un vecteur propre de T associé à λ.

3. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ une valeur propre de T et $f \in E$ un vecteur propre associé.

a) Montrer que : $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1-\lambda}{\lambda x} f(x)$.

b) Que dire de la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x) = x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} f(x)$?

c) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de T est l'intervalle $]0, 1]$.

Solution :

1. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable, de dérivée f qui est continue ; donc T est un produit de fonctions C^1, et par dérivation d'un produit on obtient :

$$x\big(T(f)\big)'(x) + \big(T(f)\big)(x) = f(x)$$

2. a) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$; alors pour x strictement positif :

$$\big(T(f)\big)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \to F'(0) = f(0), \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0.$$

b) La fonction T est à valeurs dans E d'après la question 1 (continuité sur $\mathbb{R}_+^*$) et la question précédente (continuité en 0). La linéarité est facile (en séparant les cas $x = 0$ et $x > 0$).

3. On a $T(f) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x > 0 \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

En dérivant la première relation, on obtient $f = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et cela reste vrai en 0.

4. a) D'après la relation trouvée à la question 1 en utilisant $T(f) = \lambda f$ qui donne $T(f)' = \lambda f'$:

$\forall\, x > 0, f'(x) = \dfrac{1-\lambda}{\lambda x} f(x)$

b) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(x) = x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} f'(x) + \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}-1} f(x) = 0$.

Donc h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Une fonction propre associée à la valeur propre éventuelle λ est donc proportionnelle à la fonction $\varphi : x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, le coefficient de proportionnalité étant non nul.

• On a : $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} < 0 \iff \lambda \notin]0,1]$: $\lim\limits_{0^+} \varphi = +\infty$, donc $\varphi \notin E$.

• On a : $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0 \iff \lambda \in]0,1]$: dans ce cas la fonction φ est prolongeable par continuité en 0 et un calcul direct montre que l'on a bien $T(\varphi) = \lambda\varphi$.

• le cas $\lambda = 0$ a déjà été étudié à part.

On a ainsi envisagé tous les cas possibles, ce qui donne la conclusion.

Exercice 4.03.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tous réels $\alpha > 0$ et $x_m > 0$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, x_m)$ si X est à valeurs dans $[x_m, +\infty[$ et admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \alpha\, \dfrac{x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq x_m \\ 0 & \text{si } x < x_m \end{cases}$$

1. Prouver que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{L}(\alpha, x_m)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une espérance et calculer alors cette espérance.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une variance et calculer alors cette variance.

3. Montrer que : $\forall\, y > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} P_{(X>x)}(X > x+y) = 1$.

4. a) Soit un réel $a > 0$. Déterminer la loi de $Y = aX$.

b) Soit un réel $b > 0$. Déterminer la loi de $Z = X^b$.

5. Soit un réel $k > 1$, et W une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Déterminer la loi de $T = x_m k^W$.

Solution :

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x_m\}$.

Comme $\alpha + 1 > 1$, f est intégrable en $+\infty$, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \alpha\, x_m^\alpha \int_{x_m}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \alpha x_m^\alpha \Big[-\frac{x^{-\alpha}}{\alpha}\Big]_{x_m}^{\to+\infty} = 1$$

Donc f est bien une densité de probabilité.

2. a) Soit $x \geq x_m$. Alors :

$$F_X(x)=\alpha\,x_m^\alpha\int_{x_m}^x\frac{dt}{t^{\alpha+1}}=\alpha x_m^\alpha\big[-\frac{t^{-\alpha}}{\alpha}\big]_{x_m}^x=1-\big(\frac{x_m}{x}\big)^\alpha$$

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}, F_X(x)=\begin{cases}1-\big(\frac{x_m}{x}\big)^\alpha & \text{si } x\geq x_m\\ 0 & \text{si } x<x_m\end{cases}$

b) Pour tout $x>x_m$, $xf(x)=\dfrac{\text{constante}}{x^\alpha}$, donc f admet une espérance si et seulement si $\alpha>1$.

Dans ce cas, $E(X)=\alpha x_m^\alpha\displaystyle\int_{x_m}^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\alpha x_m^\alpha\big[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\big]_{x_m}^{\to+\infty}=\frac{\alpha x_m}{\alpha-1}$.

c) De même, $x^2f(x)=\dfrac{\text{constante}}{x^{\alpha-1}}$, donc f admet une variance si et seulement si $\alpha>2$.

Dans ce cas : $E(X^2)=\alpha x_m^\alpha\displaystyle\int_{x_m}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha-1}}=\alpha x_m^\alpha\big[\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha}\big]_{x_m}^{\to+\infty}=\frac{\alpha x_m^2}{\alpha-2}$.

Donc, par la formule de Koenig-Huygens : $V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{\alpha x_m^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$.

3. Soit $y>0$.
Alors, comme $[X>x+y]\subset[X>x]$:

$$P_{(X>x)}(X>x+y)=\frac{P(X>x+y)}{P(X>x)}=\frac{(\frac{x_m}{x+y})^\alpha}{(\frac{x_m}{x})^\alpha}=\big(\frac{x}{x+y}\big)^\alpha\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

4. a) Soit $y\in\mathbb{R}$. Alors $P(Y\leqslant y)=P(aX\leqslant y)=P\big(X\leqslant\frac{y}{a}\big)=1-\big(\frac{ax_m}{y}\big)^\alpha$, donc $Y\hookrightarrow\mathcal{L}(\alpha,ax_m)$.

b) Pour tout $z\leqslant0$, $P(Z\leqslant z)=0$. Soit $z>0$, alors

$P(Z\leqslant z)=P(X^b\leqslant z)=P\big(X\leqslant z^{\frac{1}{b}}\big)=1-\big(\frac{x_m}{z^{1/b}}\big)^\alpha=1-\big(\frac{x_m^b}{z}\big)^{\frac{\alpha}{b}}$. Donc $Z\hookrightarrow\mathcal{L}\big(\frac{\alpha}{b},x_m^b\big)$.

5. Pour tout $t\leqslant0$, $P(T\leqslant t)=0$.
Soit $t>0$. Alors : $P(T\leqslant t)=P\big(k^W\leqslant\frac{t}{x_m}\big)=P\big(W\ln k\leqslant\ln\big(\frac{t}{x_m}\big)\big)$.
Comme $k>1$, on a $\ln k>0$, donc :

$$P(T\leqslant t)=P\big(W\leqslant\frac{1}{\ln k}\ln\big(\frac{t}{x_m}\big)\big)=1-\exp\big(-\frac{\lambda}{\ln k}\ln\big(\frac{t}{x_m}\big)\big)=1-\big(\frac{x_m}{x}\big)^{\frac{\lambda}{\ln k}}$$

et $T\hookrightarrow\mathcal{L}\big(\frac{\lambda}{\ln k},x_m\big)$.

Exercice 4.04.

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$f(P)=\frac{1}{2}(X^2-1)P''-XP'+P$$

1. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, calculer $f(X^k)$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Dans cette question seulement, on suppose $n = 3$.

a) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Montrer que f est un projecteur ; préciser son noyau et son image.

4. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X, 1 + X^2)$.

5. On suppose $n \geq 3$. Quelles sont les valeurs propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution :

1. On a, pour $k \geq 2$:

$$f(X^k) = \frac{k(k-1)}{2}(X^2 - 1)X^{k-2} - kX^k + X^k = \frac{k-1}{2}[(k-2)X^k - kX^{k-2}]$$

On a d'autre part : $f(1) = 1$, $f(X) = 0$, puis par la formule précédente $f(X^2) = -1$ et $f(X^3) = X^3 - 3X$. On peut donc convenir que la formule générale est valide pour $k = 0$ et $k = 1$.

2. L'application f est linéaire par linéarité de la dérivation et propriétés des opérations sur les polynômes.

D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\deg(f(X^k)) \leq k \leq n$, soit $f(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme f est linéaire, on en déduit que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

3. a) Les calculs faits en 1. donnent : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Le calcul donne $M^2 = M$, donc f est un projecteur.

En notant $C_1, \dots, C_4$ les colonnes de M, comme $C_2 = 0$, $C_3 = -C_1$, on a :

$$\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1, C_4), \text{ soit } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(1, -3X + X^3)$$

Comme C_1, C_4 ne sont pas colinéaires, f est de rang 2 ; le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} M = 4 - 2 = 2$; or $C_2 = 0$, $C_1 = -C_3$ donnent aussi :

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} M$, donc $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$, *i.e.*

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X, 1 + X^2)$$

4. On a déjà vu que : $f(X) = 0$ et $f(X^2 + 1) = f(X^2) + f(1) = 0$, donc $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$.

Les calculs faits en 1. montrent que $\deg f(X^k) = k$ pour tout $k \notin \{1, 2\}$, on en déduit que f est au moins de rang $n - 1$ (car $(f(1), f(X^3), f(X^4), \dots)$ est échelonnée).

Donc, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, par le théorème du rang, on a exactement $\dim \operatorname{Ker} f = 2$, et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X, 1+X^2)$.

5. D'après le calcul de $f(X^k)$ la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure ; donc les valeurs propres se lisent sur sa diagonale, soit :

$$\operatorname{Sp}(f) = \operatorname{Sp}(M) = \left\{ \frac{(k-1)(k-2)}{2} / \ k \in [\![0, n]\!] \right\}$$

Pour $k=1$ et $k=2$ (resp. $k=0$ et $k=3$) on obtient deux fois la même valeur propre 0 (resp . 1), et les autres nombres obtenus sont distincts et distincts de 0 et 1 (car $k \mapsto (k-1)(k-2)$ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$). Ainsi f a $n-1$ valeurs propres distinctes.

On a vu que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 2. Des calculs simples montrent que 1 et $\frac{1}{3}X^3 - X$ sont propres pour la valeur propre 1, donc la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut au moins $2\times 2 + (n-3)\times 1 = n+1$ et comme elle ne peut excéder $n+1$, elle vaut exactement $n+1$ et :

$$f \text{ est diagonalisable.}$$

Exercice 4.05.

On désigne par E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour f élément de E, on note :

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,dt \text{ et } G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt$$

1. a) Montrer que les fonctions F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}$. Etudier leurs parités respectives.

b) Les fonctions F et G sont-elles bornées ?

2. Dans cette question seulement, f est la fonction constante égale à 1.

a) Déterminer F et montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Obtenir un résultat analogue pour la fonction G.

b) Montrer que dans chaque intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_k tel que $F'(x_k) = 0$.

3. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'existence d'un réel $A > 0$, qui dépend de f, tel que :

$$\forall\, x > 0, |F(x)| \leqslant \frac{A}{x}$$

et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

4. Trouver un nombre réel K (qui dépend de f) tel que :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, |F(x) - F(y)| \leqslant K|x-y|$$

En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. a) Pour tout réel x, les 2 fonctions $t \mapsto f(t)\cos(xt)$ et $t \mapsto f(t)\sin(xt)$ sont continues sur $[0,1]$ donc les fonctions F et G sont bien définis sur $\mathbb{R}$. La fonction F est paire et G est impaire.

b) $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(t)||\cos(xt)|dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|dt$, donc F est bornée, de même pour G.

2. a) Soit $x \neq 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)dt = \frac{\sin(x)}{x}$ et $F(0) = \displaystyle\int_0^1 dt = 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$.
La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$x > 0 \implies F'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

Pour $x \neq 0$, $\dfrac{F(x) - F(0)}{x} = \dfrac{\sin x - x}{x^2} \underset{(0)}{\sim} -\dfrac{x}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc F est aussi dérivable en 0.

De même $x \neq 0 \implies G(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)dt = \frac{1-\cos(x)}{x}$ et
$G(0) = 0 = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x}$ (car $1 - \cos x \underset{(0)}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$).
Des arguments similaires montrent que G est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $G'(0) = \dfrac{1}{2}$.

b) La fonction F est dérivable sur $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ et $F'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.
Soit $h(x) = x\cos(x) - \sin(x)$, h est dérivable sur l'intervalle I_k et $h'(x) = -x\sin x$ du signe de $(-1)^k$ sur I_k. Ainsi h est strictement monotone sur I_k et ne peut pas s'annuler plusieurs fois. Donc F' non plus.
Mais $F(k\pi) = F((k+1)\pi) = 0$, donc par le théorème de Rolle (par exemple) ou directement car l'expression de F' est connue, F' s'annule au moins une fois. Finalement elle s'annule une fois et une seule.

3. Soit $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(xt)dt = \Big[\frac{f(t)\sin(xt)}{x}\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\frac{\sin(xt)}{x}\,dt$

$$F(x) = \frac{f(1)\sin(x)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\sin(xt)dt$$

La fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$ d'où l'existence d''une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\, x \in [0,1], |f'(t)| \leqslant C \text{ et } |F(x)| \leqslant \frac{|f(1)| + C}{x}$$

On a donc $\displaystyle\lim_{+\infty} F = 0$ et on conclut de même en $-\infty$ par parité.

4. $\forall (x,y), F(x) - F(y) = \displaystyle\int_0^1 f(t)[\cos(xt) - \cos(yt)]dt.$

Donc $|F(x)-F(y)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(t)||xt-yt|$ (car par l'inégalité des accroissements finis, ou formule de trigonométrie :$|\cos u - \cos v| \leqslant |u-v|$).

Ainsi $|F(x)-F(y)| \leqslant |x-y| \displaystyle\int_0^1 t|f(t)|\,dt$.

D'où la continuité de F (qui est même lipschitzienne).

Exercice 4.06.

Soit un entier $N \geqslant 2$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On y effectue une suite indéfinie de tirages avec remise. L'expérience est modélisée dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au numéro du premier tirage pour lequel k boules distinctes ont été obtenues au moins une fois.

En particulier, X_N représente le numéro du premier tirage pour lequel toutes les boules de l'urne sont sorties au moins une fois.

1. a) On note $T_1 = X_1$ et, pour tout $k \in [\![2, N]\!]$, $T_k = X_k - X_{k-1}$. Montrer que T_k suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre p_k.

   b) En déduire l'espérance et la variance de T_k.

Dans la suite, on pourra admettre que les variables T_k sont mutuellement indépendantes.

2. Montrer que X_N admet une espérance et une variance, et déterminer $E(X_N)$ et $V(X_N)$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

   a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$.

   b) En déduire que $E(X_N) \underset{(N\to\infty)}{\sim} \ln(N)$.

4. a) Montrer que $V(X_N) \leqslant 2N^2$.

   b) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P\big(|X_N - NH_N| \geqslant \alpha\, N\big) \leqslant \dfrac{2}{\alpha^2}$.

Solution :

1. a) La variable T_k correspond au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une nouvelle boule à partir du moment où $(k-1)$ boules distinctes ont déjà été tirées.

Cela correspond au temps d'attente d'un premier succès dans un processus de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $\dfrac{N+1-k}{N}$, qui est la proportion de boules qui n'ont jamais été tirées.

Donc T_k suit une loi géométrique de paramètre $p_k = \dfrac{N+1-k}{N}$.

b) On en déduit que :

$$E(T_k)=\frac{1}{p_k}=\frac{N}{N+1-k} \text{ et } V(T_k)=\frac{(1-p_k)}{p_k^2}=\frac{(k-1)N}{(N+1-k)^2}.$$

2. Comme $X_n=\sum\limits_{k=1}^{N} T_k$, par linéarité de l'espérance,

$$E(X_N)=\sum_{k=1}^{N} E(T_k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{N}{(N+1-k)}=N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$$

De plus, comme les variables T_k sont mutuellement indépendantes,

$$V(X_N)=\sum_{k=1}^{N} V(T_k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{(k-1)N}{(N+1-k)^2}=N\sum_{k=1}^{N}\frac{N-k}{k^2}$$

3. Classiquement par décroissance de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{k+1}\leqslant \ln\big(\frac{k+1}{k}\big)\leqslant\frac{1}{k} \text{ pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*$$

et, par sommations télescopiques : $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\leqslant 1+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\leqslant 1+\ln n$; $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\geqslant \ln(n+1)$.

b) Pour tout entier $n>1$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\leqslant\dfrac{H_n}{\ln n}\leqslant 1+\dfrac{1}{\ln n}$.

Par encadrement $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{H_n}{\ln n}=1$, puis $E(X_N)\underset{(\infty)}{\sim} N\ln N$.

4. a) On a :

$$\begin{aligned} V(X_N)&=N\sum_{k=1}^{N}\frac{N-k}{k^2}\leqslant N^2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\\ &\leqslant N^2\Big(1+\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k(k-1)}\Big)=N^2\Big(1+\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}\Big)\end{aligned}$$

Donc $V(X_N)\leqslant N^2(1+1-\dfrac{1}{N})\leqslant 2N^2$.

b) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|X_N-NH_N|\geqslant\alpha N)=P(|X_N-E(X_N)|\geqslant\alpha N)\leqslant\frac{V(X_N)}{\alpha^2N^2}\leqslant\frac{2}{\alpha^2}.$$

Exercice 4.07.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1, a et b sont 2 réels tels que $a\leq b$.

Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on note : $\varphi_n : P\mapsto (X-a)(X-b)P'-n(X-\dfrac{a+b}{2})P$.

1. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On note $I=\,]b,+\infty[$.

a) Démontrer que la fonction $f:x\mapsto\dfrac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}$ est continue sur I et déterminer une primitive F de f sur I.

b) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $y\in\mathcal{C}^1(I)$ telles que pour tout $x\in I$:

$$y'(x) = \frac{n(x - \frac{a+b}{2})}{(x-a)(x-b)} y(x)$$

Vérifier que $y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{nF(x)}{2}} \in \mathcal{S}$.

Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$ et qu'il est engendré par y_1.

c) En déduire $\mathrm{Ker}(\varphi_n)$.

d) L'endomorphisme φ_n est-il bijectif ?

3. Dans cette question $n = 1$ et $a \neq b$.

a) Soit $\mathcal{B} = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathcal{B}' = (X - a, X - b)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$ et déterminer M et M' matrices de φ_1 respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

b) Trouver une relation entre M et M' et en déduire que :
$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, M^{2p} = K(p).I_2$ où $K(p)$ est un réel à déterminer et I_2 la matrice unité d'ordre 2.

c) Soit un entier $m > 0$. On note $\Delta_m = \{\alpha_0 I_2 + \alpha_1 M + \alpha_2 M^2 + \cdots + \alpha_m M^m, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$. Montrer que Δ_m est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on déterminera une base.

Solution :

1. φ_n est linéaire par linéarité de la dérivation.
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors le coefficient du terme de degré $n+1$ de $\varphi_n(P)$ est nul, donc $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a) $f : x \mapsto \dfrac{2x - (a+b)}{x^2 - (a+b)x + ab}$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, elle est donc continue sur I et même indéfiniment dérivable.
$F(x) = \ln(x^2 - (a+b)x + ab) + K$, car $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b) > 0$ sur I.

b) $y_1(x) = (x^2 - (a+b)x + ab)^{\frac{n}{2}}$, donc

$$y_1'(x) = \frac{n}{2}(2x - (a+b))(x^2 - (a+b)x + ab)^{\frac{n}{2}-1} = \frac{n(x - \frac{a+b}{2})}{(x-a)(x-b)} y_1(x).$$

Par linéarité de la dérivation, $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_1(I)$.
On note $h : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{n(x - \frac{a+b}{2})}{(x-a)(x-b)}$.
Soit $y_2 \in \mathcal{S}$, on a : $y_2' = h.y_2$ et $y_1' = h.y_1$ d'où :
$y_1'y_2 - y_1y_2' = 0$ et $\dfrac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_1^2} = 0$ car y_1 ne s'annule pas sur I d'où : $(\dfrac{y_2}{y_1})' = 0$ et il existe C tel que $y_2 = Cy_1$ donc $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\{y_1\}$.

c) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$, on note P_I la restriction de P à I :
$P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n) \implies P_I \in \mathcal{S} = \mathrm{Vect}\{y_1 : x \mapsto (x^2 - (a+b)x + ab)^{\frac{n}{2}}\}$ avec P_I fonction polynôme.

Les fonctions polynômes P et P_I coincidant sur I, les polynômes correspondants sont égaux.
d'où :
si $n = 2p+1$ est impair : $y_1(x) = (x^2-(a+b)x+ab)^p \times ((x-a)(x-b))^{\frac{1}{2}}$;

si $a = b$: $y_1(x) = (x-a)^n$ d'où $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\{y_1\}$;

si $a \neq b$: $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0\}$;

si n est pair : $y_1 \in \mathbb{R}_n[X]$ d'où : $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\{y_1\}$.

d) En dimension finie, l'endomorphime φ_n est injectif si et seulement si φ_n est surjectif donc si et seulement si n est impair et $a < b$.

3. $n = 1$ est impair et $a \neq b$ donc φ_1 est un isomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

a) $\mathcal{B}'$ est une famille de 2 éléments de $\mathbb{R}_1[X]$ qui sont clairement non proportionnels, il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_1[X]$. On a facilement :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b-a}{2} \end{pmatrix}$$

b) soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$:

$$P = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}.$$

On a : $M = PM'P^{-1}$ et comme $M'^2 = \big(\frac{b-a}{2}\big)^2 I_2$, on a : $M^{2p} = \dfrac{(b-a)^{2p}}{2^p} I_2$.

c) $\Delta_m = \mathrm{Vect}\{I_2, M, M^2, \ldots, M^m\}$ et à ce titre, c'est bien un espace vectoriel. Les puissances paires sont proportionnelles à I_2, donc les puissances impaires sont proportionnelles à M et pour $m > 0, (I_2, M)$ est une base de Δ_m.

Exercice 4.08.

1. Déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$ converge.

On pose alors $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4x^2t^2}$ est convergente et donner sa valeur.

3. En utilisant la question précédente, donner un équivalent de $F(x)$, pour x au voisinage de 0.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

5. Étudier les variations de F et tracer son graphe dans un repère orthonormé du plan.

Solution :

1. Le terme général de la série proposée est positif, défini pour tout $n \geq 0$, et pour tout $x \neq 0$ fixé, $\dfrac{1}{1+4n^2x^2} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{C}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente.

Pour $x = 0$, la série diverge grossièrement. Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}^*$. De plus cette fonction est paire : il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^{*+}$.

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Le changement de variable linéaire $u = 2xt$ donne :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2x}\int_0^{2xA} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{4x}$$

3. On utilise une comparaison série/intégrale, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2t^2}$ étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Il vient, pour tout $N > 0$:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1+4k^2x^2} \leqslant \int_0^N \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1+4k^2x^2}$$

ou

$$-1 + \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{1+4k^2x^2} \leqslant \int_0^N \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{1+4k^2x^2} + \frac{1}{1+4N^2x^2}$$

Il reste à faire tendre N vers $+\infty$ et on obtient :

$$F(x) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,dt = \frac{\pi}{4x} \leqslant F(x)$$

ce qui montre, en replaçant $F(x)$ au centre de l'encadrement et en divisant par $\frac{\pi}{4x}$ pour appliquer le théorème de limite par encadrement, que $F(x)$ est équivalent à $\frac{\pi}{4x}$ au voisinage de $x = 0$

4. On a :

$$|F(x) - 1| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4x^2n^2} = \frac{1}{4x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{C}{4x^2}$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

5. Chaque fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2n^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction F l'est également.

L'allure de la représentation graphique est alors claire.

Exercice 4.09.

On effectue une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer donne Pile » et F_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer donne Face ».

Pour tout $n \geqslant 3$ on note :

$$B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n, \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i \text{ et } u_n = P(U_n)$$

1. Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $P(B_n)$.

2. Pour tout $n \geqslant 3$, montrer que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont incompatibles ; sont-ils mutuellement indépendants ?

3. Calculer u_3, u_4 et u_5.

4. Pour tout $n \geqslant 5$, trouver une relation entre $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$; en déduire une expression de $P(U_n \cap B_{n+1})$ à l'aide de u_{n-2}.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente.

6. Pour tout $n \geqslant 5$, montrer que $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

7. Déterminer la limite de la suite (u_n).

8. Calculer la probabilité de l'événement $N =$ « dans la succession des lancers, il n'y a jamais deux Pile successifs immédiatement suivis d'un Face ».

Solution :

1. Les événements P_{n-2}, P_{n-1} et F_n sont indépendants, donc :

$$P(B_n) = P(P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) = P(P_{n-2})P(P_{n-1})P(F_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2. L'événement $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ est inclus dans F_n et l'événement $B_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}$ est inclus dans P_n. Comme P_n et F_n sont incompatibles, il en est de même pour B_n et B_{n+1}. Comme le raisonnement ne dépend pas de n, il en est de même pour B_{n+1} et B_{n+2}. Analogue pour B_n (inclus dans F_n) et B_{n+2} (inclus dans P_n).
Par incompatibilité $P(B_n \cap B_{n+1}) = 0 \neq P(B_n)P(B_{n+1}) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$. Donc les événements ne sont pas indépendants deux à deux, et encore moins mutuellement indépendants.

3. D'après l'incompatibilité démontrée avant, on a :

$$u_3 = P(B_3) = \frac{1}{8} \quad u_4 = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$
$$u_5 = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

4. D'après la définition des U_i, on a $U_n = U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n$, donc par les lois de Morgan :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$$

soit $U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap B_{n+1})$ puisque B_{n-1}, B_n et B_{n+1} sont incompatibles.

L'événement U_{n-2} ne dépend que des résultats des $n-2$ premiers lancers et l'événement B_{n+1} ne dépend que des résultats des lancers $n-1$, n et $n+1$, donc U_{n-2} et B_{n+1} sont indépendants, d'où :

$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2})P(B_{n+1}) = \frac{1}{8}u_{n-2}$$

5. Comme $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, on a $U_n \subset U_{n+1}$, donc par croissance de P, on a $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est croissante.
La suite est croissante et majorée par 1 (u_n est une probabilité), donc elle converge.

6. Comme $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, on a :

$$u_{n+1} = P(U_n \cup B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_{n-2}.$$

7. On sait que (u_n) converge vers une limite finie ℓ ; par passage à la limite dans la relation précédente, on a $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1-\ell)$, soit $\ell = 1$.

8. On a $\overline{N} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n$. Or les événements (U_n) forment une suite croissante, donc, par continuité croissante de P, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(U_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = 1.$$

Donc $P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 0$.

Exercice 4.10.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant comme densité la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \dfrac{1}{\pi(t^2+1)}$.

1. a) Vérifier que h est bien une densité.

   b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

3. Soit U la variable aléatoire réelle définie par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, U(\omega) = \begin{cases} \ln(|X(\omega)|) & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$ est absolument convergente. On note I sa valeur.

   b) En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, calculer I.

   c) Montrer que U admet une espérance et calculer sa valeur.

   d) Déterminer la fonction de répartition F_U de U.

e) En déduire que la fonction f_U définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, u \in \mathbb{R}, f_U(u) = \dfrac{2e^u}{\pi(e^{2u}+1)}$ est une densité de U.

f) Déterminer la parité de f_U et retrouver la valeur de $E(U)$.

Solution :

1. a) La fonction h est positive et continue sur $\mathbb{R}$.
De plus h est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A h(t)dt = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\arctan(A) = \frac{1}{2}$. Par parité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$ converge et vaut 1. Ainsi, h est bien une densité de X.

b) On a $t\times h(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{\pi t}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\pi t}$ diverge (Riemann) ; donc par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} th(t)dt$ diverge, et a fortiori $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)dt$ aussi. Ainsi X n'admet pas d'espérance.

2. On a $\forall\, x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)dt = \lim_{A\to-\infty}\Big[\frac{\arctan(t)}{\pi}\Big]_A^x = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$.

3. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Étude en 0 : $\Big|\dfrac{\ln x}{x^2+1}\Big| = \dfrac{-\ln x}{x^2+1} \underset{(0^+)}{\sim} -\ln x$. Or $\displaystyle\int_0^1 -\ln x\,dx$ converge (on peut la calculer en intégrant par parties ...), donc par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions de signe fixe, $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{x^2+1}dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$ convergent.

• Étude en $+\infty$: $\dfrac{\ln x}{x^2+1} \underset{(+\infty)}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^{3/2}}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ converge (Riemann), donc par critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx$ converge.
Finalement, par la relation de Chasles, l'intégrale proposée converge (absolument). On la note I.

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant strictement décroissante et de classe C^1 de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, on peut donc poser $t = \dfrac{1}{x}$. Il vient alors $I = -I$, donc $I = 0$.

c) La variable aléatoire U admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|x|}{\pi(x^2+1)}dx$ converge absolument.

Par parité, cela revient à montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln|x|}{\pi(x^2+1)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\pi(x^2+1)}dx$ converge absolument ce qui a été démontré.

Ainsi, U admet une espérance et $E(U) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|h(x)dx = 2I = 0$.

d) On remarque que l'événement $[X = 0]$ est quasi-impossible. Soit $u \in \mathbb{R}$. Par croissance de la fonction exponentielle :

- si $u < 0$, $[U \leqslant u] = [|X| \leqslant \mathrm{e}^u]$;
- si $u \geqslant 0$, $[U \leqslant u] = [|X| \leqslant \mathrm{e}^u] \cup [X = 0] = [|X| \leqslant \mathrm{e}^u]$.

Ainsi, $F_U(u) = P(-\mathrm{e}^u \leqslant X \leqslant \mathrm{e}^u) = \dfrac{2\arctan(\mathrm{e}^u)}{\pi}$.

e) La fonction F_U étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on peut prendre comme densité $f_U = F'_U$.

f) On a : $\forall u \in \mathbb{R}$, $f_U(-u) = \dfrac{2\mathrm{e}^{-u}}{\pi(\mathrm{e}^{-2u}+1)} = f_U(u)$, donc f_U est paire. On montre facilement (par négligeabilité) la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf_U(t)dt$. Par imparité, $E(U)$ existe et vaut 0.

Exercice 4.11.

1. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(0) = 0$ et : $\forall\, x \in\,]0,1], g(x) = -x\ln(x)$. Étudier la continuité, la dérivabilité et les variations de g sur $[0,1]$.

2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, u \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + R_n(u)$$
où R_n est une fonction continue vérifiant $\forall\, u \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant R_n(u) \leqslant \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^u$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}u^n\, du$.

a) Justifier l'existence de J_n et la calculer en fonction de n.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant le changement de variable $x = \mathrm{e}^{-\frac{v}{k+1}}$ montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la convergence de $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k \ln^k(x)\, dx$ et montrer que $I_k = (-1)^k \dfrac{k!}{(k+1)^{k+1}}$.

4. a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\, dx$ est convergente et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\, I_k + r_n, \text{ avec } 0 \leqslant r_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}}{(n+1)!e^{n+1}}$$

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$.

Solution :

1. $\star$ la fonction g est continue et dérivable sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -x\ln(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue sur $[0,1]$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc g n'est pas dérivable en 0.

$\star$ $\forall\, x \in\,]0,1], g'(x) = -1-\ln(x)$, on déduit que g est croissante sur $[0,\mathrm{e}^{-1}]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}^{-1},1]$, la fonction g est magorée sur $[0,1]$ par $g(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}$, il en résulte que :

$$\forall\, x \in [0,1], 0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1} \quad (1)$$

2. La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc par Taylor (avec reste intégral), pour tout entier n et tout réel u :

$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} u^k + \frac{1}{n!}\int_0^u (u-t)^n \exp^{(n+1)}(t)dt$$

comme pour tout entier k, $\exp^{(k)} = \exp$, on en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, u \in \mathbb{R} : e^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^u (u-t)^n \mathrm{e}^t dt$$

En posant $R_n(u) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^u (u-t)^n \mathrm{e}^t dt$ on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, u \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + R_n(u) \quad (2)$$

De (2) on déduit que R_n est continue sur $\mathbb{R}$, comme différence de fonctions continues.

D'autre part, pour tout entier n et tout réel u positif :

$0 \leqslant t \leqslant u \implies 0 \leqslant (u-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant (u-t)^n e^u$, d'où

$0 \leqslant R_n(u) \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^u (u-t)^n \mathrm{e}^u dt$ ce qui entraîne $0 \leq R_n(u) \leqslant \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^u$.

(Les formules de Taylor-Young ou Taylor-Lagrange permettent d'aller plus vite)

3. a) Si on reconnaît la fonction Gamma, alors directement $J_k = \Gamma(k+1) = k!$. Sinon on procède par récurrence l'aide d'une intégration par parties.

b) Le changement de variable proposé est de classe C^1 bijectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il respecte donc convergence et valeur et donne :

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 x^k \ln^k(x) dx = \int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-\frac{vk}{k+1}} \big(-\frac{v}{k+1}\big)^k \big(-\frac{1}{k+1}\mathrm{e}^{-\frac{v}{k+1}}\,dv\big) \\ &= (-1)^k \frac{1}{(k+1)^{k+1}} J_k = (-1)^k \frac{k!}{(k+1)^{k+1}} \qquad (3) \end{aligned}$$

4. a) Pour tout $x \in]0,1]$, $x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln(x)}$, ce qui montre que la fonction $x \mapsto x^{-x}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0, son prolongement continu est $x \mapsto \mathrm{e}^{g(x)}$.

En conséquence $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx$ existe et $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{g(x)}dx$.

Grâce à la question 2 et à (2), on a pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{e}^{g(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{g(x)^k}{k!} + R_n(g(x)) \text{ et } 0 \leqslant R_n(g(x)) \leqslant \frac{g(x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{g(x)}$$

Par intégration sur $[0,1]$ on obtient :

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{g(x)}dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{g(x)^k}{k!}\,dx + \int_0^1 R_n(g(x))\,dx$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(x)^k}{k!}\,dx = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 x^k \ln^k(x)\,dx = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$.

On pose $r_n = \displaystyle\int_0^1 R_n(g(x))\,dx$, d'après la question 2, on a $0 \leqslant r_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{g(x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{g(x)}dx$.

comme $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ on déduit : $0 \leqslant r_n \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$.

b) Comme $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \int_0^1 x^{-x}\,dx$.