4

Option B/L

Exercice 4.01.

On note E l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels carrées d'ordre n.
Pour tout $A \in E$, on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A.

1. a) Montrer que l'application qui à tout M de E associe $\operatorname{tr}(M)$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

b) Est-elle bijective ? Donner les dimensions du noyau et de l'image de l'application tr.

Dans la suite A désigne une matrice de E vérifiant $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Soit T l'application définie sur E, par :

$$\forall\, M \in E, T(M) = \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A$$

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

3. Déterminer $\operatorname{Ker}(T)$ et $\operatorname{Im}(T)$, ainsi que leurs dimensions respectives.

4. Déterminer les éléments propres de T. Justifier que T est diagonalisable.

5. Déterminer un polynôme non nul $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré p possible tel que $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k T^k$ soit l'endomorphisme nul.

Solution :

1. On vérifie la linéarité de l'application trace. Comme $\operatorname{tr}(I_n) = n$, cette application n'est pas l'application nulle.
Ainsi $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}) = \mathbb{R}$ et $\dim \operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) = n^2 - 1$.

2. L'application T est linéaire par linéarité de la trace et la distributivité du produit sur la somme matricielle (axiomes d'espaces vectoriels). Il est clair que $T(M)$ est une matrice de E.

3. Soit $M \in \operatorname{Ker} T$. Alors $M = \dfrac{\operatorname{tr}(M)}{\operatorname{tr}(A)} A$. Ainsi $\operatorname{Ker} T \subseteq \operatorname{Vect}(A)$.

Réciproquement $T(A) = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}(A)$ qui est de dimension 1.

Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} T = n^2 - 1$.

On remarque que $\operatorname{tr}(T(M)) = 0$. Par inclusion et égalité des dimensions il vient $\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.

4. Comme $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}(A)$, on sait déjà que 0 est valeur propre de T, le sous-espace propre associé étant de dimension 1.

Si $T(M) = \lambda M$, avec $\lambda \neq 0$, il vient $(\operatorname{tr}(A) - \lambda)M = \operatorname{tr}(M)A$.

- Si $\operatorname{tr}(A) - \lambda \neq 0$, M est un multiple de A ce qui n'est pas possible.
- Donc $\lambda = \operatorname{tr}(A)$ et $0 = \operatorname{tr}(M)A$ ce qui entraîne que $\operatorname{tr}(M) = 0$. Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre $\operatorname{tr}(A)$ est inclus dans $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.

Réciproquement si $\operatorname{tr}(M) = 0$, alors $T(M) = \operatorname{tr}(A)M$.

En conclusion, T possède deux valeurs propres 0 et $\operatorname{tr}(A)$ de sous-espaces propres associés respectifs de dimension 1 et $n^2 - 1$.
L'endomorphisme T est diagonalisable.

5. Comme T est diagonalisable, on a $(T - 0I)(T - \operatorname{tr}(A)I) = T(T - \operatorname{tr}(A)I) = 0$. (Il suffit de le vérifier pour les matrices de E_0 et de $E_{\operatorname{tr}(A)}$).

Exercice 4.02.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de n boules numérotées de 1 à n (avec $n 2$).

Soit m un entier fixé tel que $0 \leqslant m \leqslant n$. On place au hasard m boules dans l'urne U_1 et les $n - m$ autres boules dans l'urne U_2.

On choisit au hasard un entier j de $[\![1, n]\!]$ et on déplace la boule numéro j de l'urne dans laquelle elle se trouve pour la mettre dans l'autre urne.
On répète indéfiniment cette expérience. Pour tout $k \geqslant 1$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 à l'issue des k premières expériences.

1. Donner la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.

2. Déterminer pour tout k et pour tout i une relation entre $P(X_{k+1} = i), P(X_k = i - 1)$ et $P(X_k = i + 1)$.

Soit G_k le polynôme défini par $G_k(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(X_k = i)t^i$.

3. a) Donner une expression de $E(X_k)$ à l'aide de la fonction G_k.
   b) Déterminer une relation de récurrence entre $G_{k+1}(t), G_k(t)$ et $G'_k(t)$.
   c) En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{k \to \infty} E(X_k)$.

Solution :

1. On a $X_1(\Omega) = \{m-1, m+1\}$.
L'événement $[X_1 = m-1]$ correspond au fait que la boule choisie se trouve dans l'urne U_1. Comme on a réparti m boules au hasard dans U_1, il vient :

$$P(X_1 = m-1) = \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{m}{n}} = \frac{m}{n}$$

De la même façon

$$P(X_1 = m+1) = \frac{\binom{m-1}{n}}{\binom{m}{n}} = \frac{n-m}{n}$$

$E(X_1) = (m+1) - \dfrac{2m}{n}$

2. On note A_j l'événement « la boule numéro j est dans l'urne U_1 à l'issue de la k-ième expérience ». Le système complet d'événements $(A_j, \overline{A_j})$ donne

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i) &= P_{A_j}(X_{k+1} = i)P(A_j) + P_{\overline{A_j}}(X_{k+1} = i)P(\overline{A_j}) \\ &= P(X_k = i-1)\frac{n-i+1}{n} + P(X_k = i+1)\frac{i+1}{n} \end{aligned}$$

Remarque :
cette formule reste valable pour $i = 0$ et $i = n$ car $P(X_k = -1) = P(X_k = n+1) = 0$.

3. a) Une dérivation donne $E(X_k) = G'_k(1)$.

b) Il suffit de sommer :

$$\begin{aligned} G_{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^{n} P(X_{k+1} = i)t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \big(P(X_k = i-1)\frac{n-i+1}{n} + P(X_k = i+1)\frac{i+1}{n}\big)t^i \\ &= t\sum_{i=0}^{n-1} P(X_k = i)\frac{n-i}{n}t^i + \sum_{i=1}^{n} P(X_k = i)\frac{i}{n}t^{i-1} \\ &= tG_{k-1}(t) + \big(\frac{1-t^2}{n}\big)G'_k(t) \end{aligned}$$

c) On dérive l'expression obtenue :

$$G'_{k+1}(t) = tG'_k(t) + G_k(t) - \frac{2t}{n}G'_k(t) + \frac{1-t^2}{n}G''_k(t).$$

Puis pour $t = 1$: $E(X_{k+1}) = 1 + \big(1 - \frac{2}{n}\big)E(X_k)$.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique de raison adéquate et $\lim\limits_{k\to\infty} E(X_k) = 1$.

Exercice 4.03.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_m[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ par :

$$U \longmapsto ma(X-1)U(X) - aX(X-1)U'(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$.

2. Soit λ une valeur propre de f et P un vecteur propre unitaire (*i.e.* de coefficient dominant égal à 1) de f associé à la valeur propre λ.

a) Établir que 0 ou 1 est une racine de P.

b) On peut donc poser : $P(X) = X^h(X-1)^k R(X)$, avec h et k deux entiers naturels tels que $1h + km$ et $R(X)$ un polynôme tel que $R(0) \neq 0$ et $R(1) \neq 0$.

Déterminer h et λ en fonction de a, k et m, puis P en fonction de k et de m.

3. Montrer que f est diagonalisable.

4. On pose pour tout $k \in [\![0, m]\!], W_k = X^{m-k}(X-1)^k$. Montrer que $(W_0, \ldots, W_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$ et donner la matrice de f dans cette base.

5. En décomposant le polynôme $U = 1$ dans la base $(W_0, \ldots, W_m)$, montrer que :

$$m(X-1) = -\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k}(-1)^k k W_k$$

6. Montrer que : $\mathbb{R}_m[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Solution :

1. On vérifie aisément que l'application f est linéaire et que si U est de degré m, alors $f(U)$ est de degré inférieur ou égal à m.

2. a) L'équation $f(P) = \lambda P$ est équivalente à $(ma(X-1) - \lambda)P(X) = aX(X-1)P(X)$.

- en remplaçant X par 0, il vient $-(ma + \lambda)P(0) = 0$. Donc si $\lambda \neq -ma$, $P(0) = 0$.
- en remplaçant X par 1, il vient $-\lambda P(1) = 0$. Donc si $\lambda \neq 0$, $P(1) = 0$.

b) Au vu des questions suivantes, on essaie de voir pour quelles valeurs de h et k, $P(X) = X^h(X-1)^k$ serait vecteur propre de f et l'éventuelle valeur propre associée.

On remplace P par $X^h(X-1)^k$ dans l'équation $f(P) = \lambda P$. Il vient

$$X^h(X-1)^k\left[a(m-h-k)X - (ma - ah + \lambda\right] = 0$$

Donc $h + k = m$ et $\lambda = a(h-m)$.

Ainsi les polynômes $P(X) = X^{m-k}(X-1)^k, k \in [\![0, m]\!]$ sont vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives $-ak$.

3. L'endomorphisme f admet $m+1$ valeurs propres distinctes. Il est diagonalisable.

4. La famille proposée est une base de vecteurs propres de f. La matrice de f dans cette base est diagonale de diagonale $\operatorname{diag}(0, -a, -2a, \ldots, -ma)$.

5. On écrit $(-1)^m = (X-1-X)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^{m-k} X^{m-k}(X-1)^k$

d'où $1 = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^k X^{m-k}(X-1)^k = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^k W_k$

Ainsi

$$f(1) = am(X-1) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^k f(W_k) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^k(-ak)W_k$$

6. Cette propriété est en fait vérifiée dès que f est diagonalisable.

Exercice 4.04.

Soit N un entier naturel tel que $N \geqslant 2$. On considère $N+1$ urnes numérotées de 0 à N.

L'urne numéro 0 contient une seule boule numérotée 0. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k et $N-k$ boules numérotées 0.

On s'intéresse à la suite d'expériences suivante

• La première épreuve consiste à choisir au hasard une urne parmi les urnes numérotées de 1 à N, puis d'en tirer une boule avant de la remettre dans la même urne.

• Si la boule numéro j, avec $j \in [\![0, N]\!]$, a été obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve, l'épreuve suivante consiste à tirer au hasard et avec remise une boule de l'urne numéro j.

On suppose que l'expérience envisagée est modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Z_n la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage.

1. Montrer que pour tout $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tel que $r \leqslant s$, on a :

$$\sum_{k=r}^{s} \binom{k}{r} = \binom{s+1}{r+1}$$

2. a) Montrer que $P(Z_1 = 0) = \dfrac{N-1}{N}$.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $P(Z_1 = k) = \dfrac{N-k+1}{N^2}$.

c) Calculer $E(Z_1)$.

3. a) Soit $k \in [\![1, \mathbb{N}]\!]$. Déterminer une relation entre $P(Z_{n+1} = k)$ et $(P(Z_n = j))_{0 \leq j \leq N}$.

Montrer que $P(Z_n = k) = \dfrac{1}{N^{n+1}}\dbinom{N+n-k}{n}$.

b) En déduire $P(Z_n = 0)$.

Solution :

1. C'est une question classique qui se démontre par récurrence en utilisant la formule du triangle de Pascal.

2. a) Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, notons U_k l'événement « le premier tirage a lieu dans l'urne numéro k ». La famille $(U_k)_{1 \leq k \leq N}$ forme un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne

$P(Z_1 = 0) = \sum_{k=1}^{N} P_{U_k}(Z_1 = 0)P(U_k) = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\dfrac{N-k}{N} = \dfrac{1}{N^2}\times\dfrac{N(N-1)}{2} = \dfrac{N-1}{2N}$

b) En utilisant le même système complet d'événements :

$$P(Z_1 = k) = \sum_{j=1}^{N} P_{U_j}(Z_1 = k)P(U_j) = \frac{1}{N}\sum_{j=k}^{N}\frac{1}{N} = \frac{N-k+1}{N^2}$$

c) On vérifie que $\sum_{k=0}^{N} P(Z_1 = k) = 1$ et $E(Z_1) = \dfrac{(N+1)(N+2)}{6N}$.

3. a) On montre par récurrence que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$P(Z_n = k) = \dfrac{1}{N^{n+1}}\dbinom{N+n-k}{n}$.

- Ceci vient d'être fait pour $n = 1$,
- La famille $([Z_n = j])_{0\leq j\leq N}$ forme un système complet d'événements. Ainsi :

$P(Z_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^{N} P_{[Z_n=j]}(Z_{n+1} = k)P([Z_n = j]) = \sum_{j=k}^{N}\dfrac{1}{N}\times\dfrac{1}{N^{n+1}}\dbinom{N+n-k}{n}$

par hypothèse de récurrence.

Puis par la première question

$$P(Z_{n+1} = k) = \frac{1}{N^{n+2}}\sum_{j=k}^{N}\binom{N+n-k}{n} = \frac{1}{N^{n+2}}\sum_{j=n}^{N+n-k}\binom{j}{n}$$
$$= \frac{1}{N^{n+2}}\binom{N+n+1-k}{n+1}$$

b) On a

$$P(Z_n = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{N} P(Z_n = k) = 1 - \frac{1}{N^{n+1}}\sum_{k=1}^{N}\binom{N+n-k}{n}$$
$$= 1 - \frac{1}{N^{n+1}}\sum_{k=n}^{N+n-1}\binom{k}{n} = 1 - \frac{1}{N^{n+1}}\binom{N+n}{n+1}$$

Exercice 4.05.

Dans tout l'exercice n est un entier de $\mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et n boules noires indiscernables.

On en tire n boules simultanément.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule numéro k a été obtenue, et 0 sinon.

1. a) Déterminer la loi de X_k.

   b) Calculer l'espérance et la variance de X_k.

2. a) Montrer que pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\dfrac{1}{4(2n-1)}$.

3. On pose $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Donner l'espérance de X puis la variance de X.

4. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus en sommant les numéros des boules blanches tirées. Déterminer l'espérance de Y.

Solution :

1. a) La variable aléatoire X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_k = 1)$.

• Il y a $\dbinom{2n}{n}$ façons de choisir n boules parmi $2n$.

• il y a 1 façon de choisir la boule numéro k puis $\dbinom{2n-1}{n-1}$ façons de choisir les autres boules.

Finalement, $P(X_k = 1) = \dfrac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{1}{2}$.

b) De manière immédiate $E(X_k) = 1/2$ et $V(X_k) = 1/4$.

2. a) Un calcul analogue au précédent donne :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

b) Puis

$$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4(2n-1)}$$

3. a) Par linéarité de l'espérance, $E(X) = \dfrac{n}{2}$. Par propriété de la variance

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{n}{4} - 2\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{4(2n-1)} = \frac{n^2}{4(2n-1)}$$

4. On a $Y = \sum_{k=1}^{n} kX_k$ et par linéarité de l'espérance

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} kE(X_k) = \frac{n(n+1)}{4}$$

Exercice 4.06.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et on note ℓ sa limite.

a) Montrer que pour tout $n_0 \geqslant 1$ et pour tout $n > n_0$, on a :

$$\Big|\frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}-\ell\Big|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k-\ell|+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}|u_k-\ell|$$

b) En écrivant la définition de la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$ vers ℓ, montrer que :

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,n_0\geqslant 1 \text{ tel que } \forall\,n>n_0,\ \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}|u_k-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}=\ell$.

2. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n\times\dfrac{1+2u_n}{1+3u_n}$.

a) Montrer qu'une telle suite est bien définie.

b) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

c) On note, pour tout $n\geqslant 0$, $v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie est bien convergente, et déterminer sa limite.

d) En déduire que $u_n\underset{(\infty)}{\sim}\dfrac{1}{n}$.

Solution :

1. a) On a

$$\left|\frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}-\ell\right|=\left|\frac{u_0+\cdots+u_{n-1}-n\ell}{n}\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u_k-\ell}{n}\right|$$

et, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}-\ell\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{u_k-\ell}{n}\right|=\sum_{k=0}^{n_0-1}\left|\frac{u_k-\ell}{n}\right|+\sum_{k=n_0}^{n-1}\left|\frac{u_k-\ell}{n}\right|.$$

b) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_0\geqslant 2$ tel que pour tout $k\geqslant n_0$, $|u_k-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. On écrit :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}|u_k-\ell|\leqslant\varepsilon\frac{n-n_0}{n}\leqslant\varepsilon.$$

c) Ainsi,

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k-\ell\Big|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k-\ell|+\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}|u_k-\ell|\leqslant\frac{C_{n_0}}{n}+\varepsilon\leqslant\frac{C_{n_0}}{n}+\varepsilon,$$

où C_{n_0} ne dépend pas de n.

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$. Ainsi, il existe n_1 tel que pour tout $n\geqslant n_1$, $0<\dfrac{C_{n_0}}{n}\leqslant\varepsilon$.

Ainsi, on termine en prenant $n\geqslant\max(n_0,n_1)$, et dans ce cas,

$$\Big|\frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}-\ell\Big|\leqslant 2\varepsilon.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n} = \ell$.

2. a) On montre par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 0$.

b) Puisque, pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n > 0$, on a les inégalités suivantes, à savoir :

$$0 < \frac{1+2u_n}{1+3u_n} < 1, \text{ puis } u_{n+1} < u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente. De plus, sa limite appartient à $[0,1]$ et vérifie $l = l\dfrac{1+2l}{1+3l}$, et donc $l = 0$.

c) De $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{u_n}{1+2u_n}$, on déduit $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{1+2u_n}$.

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ admet 1 pour limite.

d) D'après la première partie, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = 1$$

Comme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = \dfrac{1}{u_n} - 1$, il vient $\dfrac{1}{u_n} \sim n$ soit $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4.07.

1. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(0) = 0$ et : $\forall\, x \in\,]0,1], g(x) = -x\ln(x)$.
Étudier la continuité, la dérivabilité et les variations de g sur $[0,1]$.

2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, u \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + R_n(u)$$

où R_n est une fonction continue vérifiant $\forall\, u \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant R_n(u) \leqslant \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^u$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}u^n\,du$.

a) Justifier l'existence de J_n et la calculer en fonction de n.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant le changement de variable $x = \mathrm{e}^{-\frac{v}{k+1}}$ montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la convergence de $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k \ln^k(x)\,dx$ et donner sa valeur.

4. a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx$ est convergente et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} I_k + r_n, \text{ avec } 0 \leqslant r_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}}$$

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$.

Solution :

1. la fonction g est continue et dérivable sur $]0,1]$ et $\lim_{x\to 0^+} -x\ln(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue sur $[0,1]$. On a $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc g n'est pas dérivable en 0.

$\forall x \in]0,1], g'(x) = -1-\ln(x)$, on déduit que g est croissante sur $[0,\mathrm{e}^{-1}]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}^{-1},1]$, la fonction g est magorée sur $[0,1]$ par $g(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}$, il en résulte que

$$\forall x \in [0,1], 0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1} \quad (1)$$

2. La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc par Taylor (avec reste intégral), pour tout entier n et tout réel u :

$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}u^k + \frac{1}{n!}\int_0^u (u-t)^n \exp^{(n+1)}(t)dt$$

comme pour tout entier k, $\exp^{(k)} = \exp$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R} : e^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^u (u-t)^n \mathrm{e}^t dt$$

En posant $R_n(u) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^u (u-t)^n \mathrm{e}^t dt$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + R_n(u) \quad (2)$$

De (2) on déduit que R_n est continue sur $\mathbb{R}$, comme différence de fonctions continues. D'autre part, pour tout entier n et tout réel u positif :

$$0 \leqslant t \leqslant u \implies 0 \leqslant (u-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant (u-t)^n e^u, \text{ d'où :}$$

$0 \leqslant R_n(u) \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^u (u-t)^n \mathrm{e}^u dt$ ce qui entraîne $0 \leqslant R_n(u) \leqslant \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^u$.

3. a) On reconnaît la fonction Gamma et $J_k = \Gamma(k+1) = k!$.

b) Le changement de variable proposé est de classe C^1 bijectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Il respecte donc convergence et valeur et donne :

$$I_k = \int_0^1 x^k \ln^k(x)dx = (-1)^k \frac{1}{(k+1)^{k+1}} J_k = (-1)^k \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$$

4. a) Pour tout $x \in]0,1]$, $x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln(x)}$, ce qui montre que la fonction $x \mapsto x^{-x}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0, son prolongement continu est $x \mapsto \mathrm{e}^{g(x)}$.

En conséquence $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx$ existe et $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{g(x)}dx$.

Grâce à la question 2 et à (2), on a pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{e}^{g(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{g(x)^k}{k!} + R_n(g(x)) \text{ et } 0 \leqslant R_n(g(x)) \leqslant \frac{g(x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{g(x)}$$

Par intégration sur $[0,1]$ on obtient

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{g(x)}dx = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 \frac{g(x)^k}{k!}\,dx + \int_0^1 R_n(g(x))\,dx$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(x)^k}{k!}\,dx = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 x^k \ln^k(x)\,dx = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$.

On pose $r_n = \displaystyle\int_0^1 R_n(g(x))\,dx$, d'après la question 2, on a

$$0 \leqslant r_n \leqslant \int_0^1 \frac{g(x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{g(x)}dx$$

comme $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ on déduit : $0 \leqslant r_n \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$.

b) Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ on déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \int_0^1 x^{-x}\,dx$

Exercice 4.08.

Soit les deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

1. Étudier le sens de variation des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis déterminer leurs limites respectives.

2. a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

et en déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres.

b) En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Préciser pour quelles valeurs de x réel les séries ci-dessous convergent, et calculer alors leurs sommes respectives :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{n!}x^n.$$

4. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants et retrouver ainsi l'expression de a_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. On montre par récurrence que a_n et b_n sont des entiers naturels non nuls pour $n \geqslant 1$; donc les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont strictement croissantes et tendent toutes deux vers $+\infty$.

2. a) On a : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathrm{Sp}(M) = \left\{\lambda = 1+\sqrt{2}, \mu = 1-\sqrt{2}\right\}$ puis

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda\, I_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix},\ \mathrm{Ker}(A-\mu\, I_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

b) D'où

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = M^n\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\lambda^n & -\sqrt{2}\mu^n\\ \lambda^n & \mu^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

$$a_n = \frac{\lambda^n-\mu^n}{\sqrt{2}}\quad \text{et}\quad b_n = \frac{\lambda^n+\mu^n}{2}$$

3. Par somme de séries exponentielles convergentes, on a convergence pour tout x réel, et

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{\lambda\, x}-\mathrm{e}^{\mu\, x}\right]\quad \text{et}\quad g(x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\lambda\, x}+\mathrm{e}^{\mu\, x}\right]$$

4. On a, en décalant les indices,

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1}+2b_{n+1}\\ b_{n+1} = a_n+b_n\end{cases} \Rightarrow a_{n+2} = a_{n+1}+2a_n+2b_n = a_{n+1}+2a_n+(a_{n+1}-a_n)$$

Soit $a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n = 0$.

L'équation caractéristiquede cette récurrence linéaire est : $X^2-2X-1=0$ dont les racines sont $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$, puis $a_n = \alpha\,\lambda^n+\beta\,\mu^n$ avec :

$$\begin{cases} 0 = a_0 = \alpha+\beta\\ 2 = a_1 = \alpha\left(1+\sqrt{2}\right)+\beta\left(1-\sqrt{2}\right)\end{cases} \iff \alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } a_n = \frac{\lambda^n-\mu^n}{\sqrt{2}}$$

puis

$$b_n = \frac{a_{n+1}-a_n}{2} = \frac{\lambda^n+\mu^n}{2}$$

Exercice 4.09.

Soit n un entier au moins égal à 2 et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit φ l'application définie sur E par : $\varphi(M) = M - \mathrm{tr}(M)I_n$, où $\mathrm{tr}(M)$ désigne la somme des coefficients diagonaux de M.

1. a) Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

b) L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de E ?

2. a) Démontrer que l'ensemble E_1 des matrices M de E telles que $\varphi(M) = M$ est un sous-espace vectoriel de E. Préciser sa dimension.

b) Déterminer une base de E_1.

3. Démontrer que l'ensemble E_2 des matrices M de E telles que $\varphi(M) = (1-n)M$ est un sous-espace vectoriel de E. Préciser sa dimension.

4. Justifier que E_1 et E_2 sont supplémentaires.

5. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. a) Soient M_1 et M_2 deux matrices de E et λ un réel.

$$\begin{aligned}\varphi(M_1 + \lambda M_2) &= M_1 + \lambda M_2 - \operatorname{tr}(M_1 + \lambda M_2)I_n = M_1 - \operatorname{tr}(M_1) + \lambda(M_2 - \operatorname{tr}(M_2))I_n \\ &= \varphi(M_1) + \lambda\varphi(M_2)\end{aligned}$$

(car tr est linéaire).

L'application φ est donc une application linéaire de E dans E donc c'est un endomorphisme de E.

b) Si $M \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $\varphi(M) = 0$ donc $M = \operatorname{tr}(M)I_n$ et M est une matrice scalaire, *i.e.* de la forme aI_n.

On a alors $\operatorname{tr}(M) = na$, donc $naI_n = aI_n$ donc $a = 0$ et $M = 0$. Ainsi,$\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$.
Comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, φ est un automorphisme.

2. a) $M \in E_1 \iff \operatorname{tr}(M) = 0 \iff M \in \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$. E_1 est donc un sous-espace vectoriel car c'est le noyau d'une application linéaire. Comme tr est une forme linéaire non nulle, alors $\dim(\operatorname{Im}(\operatorname{tr})) = 1$, donc d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})) = n^2 - 1$.

Ainsi, $\dim(E_1) = n^2 - 1$.

b) On note $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de E.

Les $n-1$ vecteurs $E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$, où $i \in [\![1,n]\!]$ sont dans E_1. Les $n^2 - n$ vecteurs $E_{i,j}$ pour $i \neq j$ sont aussi dans E_1.

La famille formée de ces $n^2 - 1$ vecteurs est libre dans E_1 qui est de dimension $n^2 - 1$, donc c'est une base de E_1.

3. Si $M \in E_2$, alors $\varphi(M) = (1-n)M$, donc $nM = \operatorname{tr}(M)I_n$, donc M est une matrice scalaire, *i.e.* de la forme aM, où $a \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, ces matrices sont bien dans E_2, donc $E_2 = \operatorname{Vect}(I_n)$.

4. E_1 est clairement stable par φ car $\varphi(M) = M$.

Soit $M \in E_2$,

$\varphi(\varphi(M)) = \varphi(M) - \operatorname{tr}(\varphi(M))I_n = (1-n)M - (1-n)\operatorname{tr}(M)I_n$ (car $M \in E_2$ et tr est linéaire), donc

$$\varphi(\varphi(M)) = (1-n)(M - \operatorname{tr}(M)I_n) = (1-n)\varphi(M)$$

donc $\varphi(M) \in E_2$, donc E_2 est stable par φ.

Si $M \in E_1 \cap E_2$, alors $\varphi(M) = M$ et $\varphi(M) = (1-n)M$, donc $nM = 0$, donc $M = 0$.

Ainsi, $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$, et comme $\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$, E_1 et E_2 sont supplémentaires.

5. E_1 et E_2 sont les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et $1-n$. Comme dim E_1+ dim E_2 = dim E, φ est diagonalisable.