4

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(t) = \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

3. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge et donner sa valeur.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^2\mathrm{e}^{-(k+1)t} + \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{e}^{-nt}$$

c) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$ est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$.

Solution :

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, on a au voisinage de 0 : $\mathrm{e}^t = 1 + t + o(t)$, d'où : $f(t) \underset{(0)}{\sim} \dfrac{t^2}{t} = t$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0, t\neq 0} f(t) = 0$.

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$. La règle de Riemann prouve la convergence de l'intégrale.

3. a) La convergence se fait de même et la valeur se calcule en intégrant par parties, ou en connaissant Γ, ou en procédant par coefficients indéterminés, pour voir que $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}(t^2 + 2t + 2)$ est une primitive de $t \mapsto t^2\mathrm{e}^{-t}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^X t^2\mathrm{e}^{-t}dt = 2 - \mathrm{e}^{-X}(X^2 + 2X + 2) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, soit :

$$\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\,dt = 2.$$

b) Par l'identité géométrique :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 \mathrm{e}^{-t} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} = t^2 \mathrm{e}^{-t} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{-t})^k + \frac{(\mathrm{e}^{-t})^n}{1-\mathrm{e}^{-t}} \Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} t^2 \mathrm{e}^{-(k+1)t} + \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{e}^{-nt} \end{aligned}$$

Soit $f(t) = \sum_{k=1}^{n} t^2 \mathrm{e}^{-kt} + f_n(t)$, où $f_n(t) = \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{e}^{-nt}$ pour $t > 0$.

c) On a $\frac{t^2 \mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \frac{t^2}{\mathrm{e}^{t}-1}$. La première forme montre que la fonction se prolonge par continuité en 0 et la deuxième qu'elle est de limite nulle en $+\infty$, elle est bien majorée sur $\mathbb{R}^+$.

d) Le changement de variable $u = (k+1)t$, *i.e.* $t = \frac{u}{k+1}$ donne $dt = \frac{du}{k+1}$ et :

$$\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-(k+1)t}\, dt = \frac{1}{(k+1)^3} \int_0^{+\infty} u^2 \mathrm{e}^{-u} du = \frac{2}{(k+1)^3}.$$

Si on note M un majorant sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction positive $t \mapsto \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$, l'intégrale résiduelle $\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$ est positive et majorée par $M \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} dt = \frac{M}{n}$, donc de limite nulle.

En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, il vient bien :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

Exercice 4.2.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 2$.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $N = \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} 1$.

Calculer N.

2. On effectue une succession de tirages d'une boule (avec remise à chaque fois de la boule obtenue avant le tirage suivant) dans une urne comprenant au départ n boules numérotées de 1 à n.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note B_k le numéro de la $k^{\text{ème}}$ boule tirée.

On arrête d'extraire les boules de l'urne dès que $B_{k+1} \geqslant B_k$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.

a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

b) Quelle est la signification de l'événement $[X > k]$? En déduire la loi de X.

c) Calculer l'espérance de X.

d) Déterminer le nombre moyen de boules tirées, lorsque n est « très grand ».

Solution :

1. Le nombre demandé est en fait le nombre de termes de cette sommation. C'est le nombre de k listes dont les éléments sont deux à deux distincts, choisis parmi n éléments et rangées par ordre croissant : il y en a exactement $\binom{n}{k}$, puisqu'on choisit k éléments parmi n et qu'on peut alors les ranger par ordre croissant d'une unique façon.

2. a) On effectue au moins deux tirages (et on s'arrête alors si le second résultat est supérieur ou égal au premier) et au maximum $n+1$ tirages (si on obtient dans l'ordre les résultats $n, n-1, \ldots, 1$, et on est alors sûr de s'arrêter au tirage suivant).

Toutes les situations intermédiaires sont possibles, car pour $k \in [\![3, n+1]\!]$ obtenir par exemple la suite de résultats $n, n-1, \ldots, n-k+2, n-k+2$ fait que l'on s'arrête au bout de k tirages.

$$X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$$

b) Soit $k \geqslant 2$. On réalise l'événement $(X > k)$ si et seulement si on a tiré au moins $k+1$ boules de l'urne, donc si et seulement si on n'a pas fini de jouer au bout de k tirages, donc si et seulement si les k premiers tirages forment une suite strictement décroissante

$$(X > k) = (B_k < B_{k-1} < \cdots < B_2 < B_1).$$

(Bien entendu $(X > 1)$ est l'événement certain.

On écrit alors pour $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} P(X > k) &= P(B_1 > B_2 > \cdots > B_k) \\ &= \sum_{1 \leq i_k < i_{k-1} < \cdots < i_1 \leq n} P((B_1 = i_1) \cap \cdots \cap (B_k = i_k)) \end{aligned}$$

$$P(X > k) = \sum_{1 \leq i_k < i_{k-1} < \cdots < i_1 \leq n} P(B_1 = i_1) \times \cdots \times P(B_k = i_k) = \binom{n}{k} \times \frac{1}{n^k}$$

(Car chaque terme de la sommation vaut $(\frac{1}{n})^k$ et les résultats des différents tirages sont indépendants les uns des autres).

On constate que le résultat vaut pour $k = 1$ et $k = 0$ (car $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$) et même en fait pour tout k de $\mathbb{N}$ avec les conventions habituelles de nullité sur les coefficients binomiaux.

D'où, pour tout k de $[\![2, n+1]\!]$:

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

c) On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=2}^{n+1} kP(X = k) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X > k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)P(X > k) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X > k) \end{aligned}$$

Dans la deuxième somme on peut enlever le terme correspondant à $k = n+1$, puisque $P(X > n+1) = 0$ et puisque $P(X > 1) = 1$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)P(X > k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k) + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X > k) + 1 = \sum_{k=0}^{n} P(X > k) \end{aligned}$$

Soit :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

d) On a $(1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n})) = \exp(n \times (\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))) = \exp(1 + o(1))$, ce qui se traduit par :

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \exp(1) = \mathrm{e}$$

$\lim_{n \to \infty} E(X) = \mathrm{e}$: si n est grand, l'espérance du nombre de tirages effectués est donc peu différente de e.

Exercice 4.3.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit F l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme

$$F(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P',$$

où P' et P'' désignent les polynômes dérivés d'ordre 1 et 2 de P.

1. Montrer que F est un endomorphisme de E.

2. Déterminer le noyau de F. L'endomorphisme F est-il surjectif ?

3. Montrer que la restriction de F à $\mathbb{R}_n[X]$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On le note F_n dans la suite de l'exercice

4. Déterminer les valeurs propres de F_n. L'endomorphisme F_n est-il diagonalisable ?

5. Déterminer les degrés des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres de F_n.

Solution :

1. L'application F est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, puisque les dérivées de polynômes sont des polynômes et que la dérivation est linéaire.

2. Soit P un polynôme de degré $p \geqslant 0$. On peut écrire $P(X) = a_p X^p + \cdots$.
On a alors :
$$F(P)(X) = (p(p-1)a_p + 2pa_p)X^p + \cdots = p(p+1)a_p X^p + \cdots$$
Ceci montre que si $p \geqslant 1$, alors $\deg F(P) = \deg P$. Le noyau de F ne peut donc contenir que les polynômes constants, et il les contient bien !

L'endomorphisme F n'est pas surjectif, car le polynôme constant $P = 1525$ n'a pas d'antécédent par F : si Q est constant on a $f(Q) = 0$ et si $\deg Q \geqslant 1$, alors $\deg f(Q) = \deg Q \geqslant 1$: $f(Q)$ n'est jamais un polynôme constant non nul.

3. On vient de montrer que l'on a toujours $\deg F(P) \leqslant \deg P$. Ceci montre que la restriction de F à $\mathbb{R}_n[X]$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Pour déterminer les valeurs propres de F_n, explicitons la matrice A de F_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ $F_n(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$.
Ainsi
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & n(n+1) \end{pmatrix}$$
La matrice A est trigonale supérieure, donc ses valeurs propres (qui sont celles de F_n) se lisent sur sa diagonale :
$$\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} F_n = \{0, 2, \dots, n(n+1)\} = \{k(k+1), 0 \leqslant k \leqslant n\}$$
donc F_n, qui est un endomorphisme d'un espace de dimension $n+1$, admet $n+1$ valeurs propres distinctes : il est diagonalisable.

5. On a vu que $\deg F(P) = \deg P$, pour tout polynôme P de degré supérieur ou égal à 1. Donc, pour $k \geqslant 1$, tout polynôme propre associé à la valeur propre $k(k+1)$ est de degré k. Pour $k = 0$, il est de degré 0.

Exercice 4.4.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômes définie par :
$$P_0(X) = 1, \quad \text{et } \forall\, k \geqslant 1,\ P_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X - j)$$
On considère l'application Δ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même associant à P le polynôme

$$(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer le noyau de Δ.

3. Déterminer ΔP_k, pour $k \in \mathbb{N}$, puis $(\Delta^j)P_k$ pour tous k, j entiers naturels.

4. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

b) Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0) P_k(X)$$

c) En déduire que Δ est surjectif et que pour tout polynôme P non nul, il existe un unique polynôme Q de degré $\deg(P) + 1$ tel que :

$$Q(X+1) - Q(X) = P(X) \text{ et } Q(0) = 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Q_n le polynôme tel que $\Delta Q_n = X^n$ et $Q_n(0) = 0$.

5. Exprimer $S_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{p} k^n$ à l'aide de Q_n et de p.

Solution :

1. L'application Δ est clairement linéaire et si P est polynomiale, ΔP l'est également : Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. le noyau de Δ est formé des polynômes qui sont 1-périodiques.
Si $\deg P \geqslant 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \infty$ ($+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe du coefficient du terme de plus haut degré). Or une fonction continue 1-périodique est bornée, donc les seuls polynômes 1-périodiques sont des polynômes de degré négatif ou nul, *i.e.* sont des polynômes constants. Réciproquement les constantes appartiennent clairement à $\operatorname{Ker} \Delta$.

$$\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$$

3. Un calcul immédiat montre que $\Delta(P_0) = 0$, $\Delta(P_1) = P_0$ et que pour tout $k \geqslant 1, \Delta(P_k) = P_{k-1}$.
Une récurrence toute aussi immédiate montre que $\Delta^j(P_k) = P_{k-j}$, pour $k \geqslant j$ et 0 sinon.

4. a) La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degrés : elle est donc libre et de cardinal *ad hoc*. C'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) On écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P_k$. On a alors pour $j \leqslant n$:

$$(\Delta^j)P = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^j(P_k) = \sum_{k=j}^{n} a_k P_{k-j}$$

et, comme $P_\ell(0) = 0$, pour tout $\ell \geqslant 1$:

$$(\Delta^j P)(0) = \sum_{k=j}^{n} a_k P_{k-j}(0) = a_j P_0(0) = a_j$$

c) Soit P de degré p. On a par la question précédente :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{p} (\Delta^k P)(0) P_k = \sum_{k=0}^{p} (\Delta^k P)(0) \Delta(P_{k+1}) \\ &= \Delta\Big(\sum_{k=0}^{p} (\Delta^k P)(0) P_{k+1}\Big) \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application Δ est surjective.

$\star$ Ainsi $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} (\Delta^k P)(0) P_{k+1}$ est de degré $p+1$ et tel que $Q(0) = 0$, donc convient.

$\star$ Supposons qu'il existe deux polynômes Q, R tels que :

$$Q(X+1) - Q(X) = R(X+1) - R(X) = P(X) \text{ et } Q(0) = R(0) = 0.$$

Alors le polynôme $H = Q - R$ vérifie $H(X+1) - H(X) = 0$ et $H(0) = 0$. Le polynôme H appartient au noyau de Δ : il est constant et avec $H(0) = 0$, il est nul.

Il existe donc bien une solution et une seule.

5. On a $Q_n(k+1) - Q_n(k) = k^n$ et $Q_n(0) = 0$. En sommant, il vient :
$\sum\limits_{k=1}^{p} k^n = \sum\limits_{k=0}^{p} k^n = \sum\limits_{k=0}^{p} (Q_n(k+1) - Q_n(k)) = Q_n(p+1) - Q_n(0)$

$$\sum_{k=1}^{p} k^n = Q_n(p+1)$$

Exercice 4.5.

0. Question préliminaire.

Soient f et g deux fonctions définies sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) et continues sur ce segment.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \geqslant 0$. En déduire que :

$$\Big(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\Big)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt \times \int_a^b g^2(t)\,dt$$

Soit alors $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application de classe* C^1 *telle que* $f(a) = 0$.

1. En justifiant et en utilisant la relation : $\forall\, x \in [a, b], f(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$, montrer que :

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

2. Caractériser le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

3. Montrer que $\displaystyle\int_a^b |f'(x)f(x)| dx \leqslant \frac{b-a}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$.

4. Caractériser le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Solution :

0. La fonction à intégrer est (continue) positive et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \geqslant 0$$

Soit : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt + 2\lambda \int_a^b f(t)g(t)\,dt + \lambda^2 \int_a^b g^2(t)\,dt \geqslant 0$

$\star$ Si $\displaystyle\int_a^b g^2(t)\,dt = 0$, comme g est continue, g est la fonction nulle, donc fg aussi et l'inégalité demandée est banale.

$\star$ Sinon, on a $\displaystyle\int_a^b g^2(t)\,dt > 0$, et le trinôme précédent est positif ou nul sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant est négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Big(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\Big)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt \times \int_a^b g^2(t)\,dt$$

1. Comme $f(a) = 0$, on a $\forall\, x \in [a, b], f(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.

Par ailleurs on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour tout $x \in [a, b]$

$$|f(x)|^2 = \Big|\int_a^x f'(t)dt\Big|^2 \leqslant (x-a) \int_a^x |f'(t)|^2 dt \leqslant (x-a) \int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leqslant \int_a^b (x-a)\,dx \times \int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

Soit :

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

2. Comme les fonctions en présence sont continues, l'égalité ne peut se produire que si toutes les inégalités écrites sont des égalités. En particulier on doit avoir :

$$\forall x \in\,]a,b],\ \int_a^x |f'(t)|^2 dt = \int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

Comme $|f'|$ est continue, ceci entraîne que $|f'|^2$ est nulle sur $]a,b]$ et donc que f' est nulle sur $[a,b]$ par continuité. Finalement f est constante et comme $f(a)=0$, f est nulle.

3. On pose $\forall\, x \in [a,b], u(x) = \displaystyle\int_a^x |f'(t)|dt$.
Cette fonction u vérifie, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f(x)| = \Big|\int_a^x f'(t)dt\Big| \leqslant \int_a^x |f'(t)|dt = u(x)$$

En particulier,

$$\int_a^b |f'(t)f(t)|dt \leqslant \int_a^b |f'(t)|u(t)dt = \int_a^b u'(t)u(t)dt = \Big[\frac{u^2(t)}{2}\Big]_a^b$$

$$\int_a^b |f'(t)f(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}\Big(\int_a^b |f'(t)|dt\Big)^2$$

Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\Big(\int_a^b |f'(t)|dt\Big)^2 \leqslant \int_a^b 1^2 dt \times \int_a^b |f'(t)|^2 dt = (b-a)\int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

d'où l'inégalité désirée.

4. S'il y a égalité alors la dernière inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée est une égalité et les fonctions $t \mapsto f'(t)$ et $t \mapsto 1$ sont liées, autrement dit f' est constante et f affine. Réciproquement si f est affine telle que $f(a)=0$, alors toutes les inégalités précédentes sont des égalités.

Conclusion : il y a égalité si et seulement si f est affine (avec $f(a)=0$).

Exercice 4.6.

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in\,]0,1[$.

1. Déterminer la loi de la variable $X = X_1 + X_2$. Donner son espérance et sa variance.

2. Trouver la loi de la variable $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Donner son espérance et sa variance.

3. Calculer l'espérance de la variable $Y^2 + Y$. En déduire pour tout $x \in\,]0,1[$, la somme de la série :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)x^k$$

4. On admet que pour tout $x \in [0,1[$ on a : $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$

 a) On note Z la variable aléatoire donnée par $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$. Calculer l'espérance de Z et prouver que $E(Z) > 1$.

 b) Quelles sont les valeurs prises par Z ? Déterminer la loi de Z.

Solution :

1. Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la variable X est à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Soit k un entier supérieur à 2, comme les variables X_1 et X_2 sont indépendantes on obtient :

$$P(X=k) = \sum_{l=1}^{k-1} P((X_1 = l) \cap (X_2 = k-l)) = \sum_{l=1}^{k-1} P(X_1 = l)P(X_2 = k-l)$$
$$= \sum_{l=1}^{k-1} pq^{l-1}pq^{k-l-1} = (k-1)\,p^2q^{k-2}$$

Par linéarité : $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = \dfrac{2}{p}$;

et les variables X_1 et X_2 étant indépendantes : $V(X) = V(X_1) + V(X_2) = \dfrac{2q}{p^2}$.

2. De la même façon, la variable Y est à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$. Soit $k \geqslant 3$, les variables $X = X_1 + X_2$ et X_3 sont indépendantes, il en résulte que :

$$P(Y=k) = \sum_{l=2}^{k-1} P((X = l) \cap (X_3 = k-l)) = \sum_{l=2}^{k-1} P(X = l)P(X_3 = k-l)$$
$$= \sum_{l=2}^{k-1} (l-1)p^2q^{l-2}pq^{k-l-1} = p^3q^{k-3}\sum_{l=2}^{k-1}(l-1)$$
$$P(Y=k) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}p^3q^{k-3}$$

[On peut aussi remarquer que Y mesure le temps d'attente du troisème succès dans une succession d'épreuves indépendantes, la probabilité du succès à chaque essai valant p, cela revient à choisir les rangs des deux premiers succès parmi les $k-1$ premiers essais et alors on a une liste de 3 succès et $k-3$ échecs (qui se termine par un succès) ...]

Par linéarité de l'espérance, il vient :

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{3}{p}$$

et en utilisant l'indépendance :

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = \frac{3q}{p^2}$$

3. D'une part, on a :

$$E\left(Y^2 + Y\right) = E(Y^2) + E(Y) = V(Y) + E(Y)^2 + E(Y)$$
$$= \frac{3q}{p^2} + \left(\frac{3}{p}\right)^2 + \frac{3}{p} = \frac{12}{p^2}$$

D'autre part, en utilisant la loi de Y et le théorème de transfert, on obtient :

$$E(Y^2+Y) = \sum_{k=3}^{\infty}(k^2+k)P(Y=k) = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{(k-1)(k-2)k(k+1)}{2}p^3q^{k-3}$$
$$= \frac{p^3}{2}\sum_{k=4}^{+\infty}k(k-1)(k-2)(k-3)q^{k-4}$$

Soit $\displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty}k(k-1)(k-2)(k-3)q^{k-4} = \frac{24}{p^5}$ et en ajoutant les premiers termes (qui sont nuls !)

$$\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)(k-2)(k-3)q^k = \frac{24q^4}{p^5}$$

ou encore, pour $x \in]0,1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)(k-2)(k-3)x^k = \frac{24x^4}{(1-x)^5}$$

4. a) Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, il en est donc de même de X_1 et $\dfrac{1}{X_2}$, donc :

$$E(Z) = E(X_1)E\left(\frac{1}{X_2}\right) = \frac{1}{p}E\left(\frac{1}{X_2}\right)$$

Avec le théorème de transfert il vient :

$$E\Big(\frac{1}{X_2}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} pq^{n-1} = \frac{p}{q}(-\ln p) = \frac{p\ln p}{p-1}$$

Une étude rapide de la fonction $p \mapsto \ln p - p + 1$ nous montre que $\ln p < p - 1 < 0$, d'où (attention au signe) $E\big(\frac{1}{X_2}\big) > p$ et $E(Z) > 1$.

b) L'ensemble des valeurs prises par Z est $\mathbb{Q}_+^*$. Soit $\omega \in \mathbb{Q}_+^*$ que l'on écrit sous forme irréductible $\omega = \frac{a}{b}$, alors $\frac{X_1}{X_2}$ vaut ω si et seulement si il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $X_1 = la$ et $X_2 = lb$.
Par l'indépendance des variables X_1 et X_2 on obtient :
$P\,(Z=\omega) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} P\,(X_1 = la)\,P\,(X_2 = lb) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} pq^{la-1}pq^{lb-1} = \frac{p^2}{q^2}\sum\limits_{l=1}^{\infty}(q^{a+b})^l$
Soit :

$$P(Z=\omega) = \frac{p^2}{q^2} \times \frac{q^{a+b}}{1-q^{a+b}}$$

Exercice 4.7.

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente (*i.e.* telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$) d'indice q (*i.e.* q est le plus petit entier naturel vérifiant $N^q = 0$). Montrer que $I_n - N$ est inversible et donner son inverse (I_n désigne la matrice identité d'ordre n).

2. Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

3. a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice 2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $(I_n + N)^p$.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; exprimer M^{100} à l'aide d'une puissance de 2.

4. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice 3.

a) Donner le développement limité de la fonction $x \to \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 2.

b) Montrer qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = I_n + N$.

Solution :

1. Il suffit de remarquer que $(I_n - N)(I_n + N + \cdots + N^{q-1}) = I_n - N^q = I_n$, donc $I_n - N \in GL_n(\mathbb{R})$ et

$$(I_n - N)^{-1} = I_n + N + \cdots + N^{q-1}.$$

2. On peut écrire $M = I_n - aN$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Une récurrence facile donne alors :

$$1 \leqslant p \leqslant n-1 \implies N^p = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^n = 0.$$

En appliquant le résultat de la question 1, (avec aN à la place de N) on voit donc que $M = I_n - aN$ est inversible et que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a) Comme I_n et N commutent, on peut écrire :

$$(I_n+N)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}N^kI_n^{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}N^k=I_n+pN$$

b) On a $M=2I_2+N$, avec $N=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ et $N^2=0$, donc d'après la question précédente :

$$M^{100}=2^{100}\left(I_2+\frac{1}{2}N\right)^{100}=2^{100}(I_2+\frac{100}{2}N)=2^{100}\begin{pmatrix}-49&50\\-50&51\end{pmatrix}$$

4. a) Le cours donne : $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)$.

b) On a $(\sqrt{1+x})^2=1+x$, donc on pense à calculer $(1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2)^2$. Il vient :

$$(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2)^2=1+x+Ax^3+Bx^4$$

Les valeurs des coefficients A et B étant sans importance.

On pose alors $X=I_n+\dfrac{1}{2}N-\dfrac{1}{8}N^2$. Par commutation et le fait que $N^3=N^4=0$, il vient

$$X^2=I_n+N$$