Planche 1

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>*deux*</u> *exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soit F la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

1. Soit α une constante, à quoi ressemble l'ensemble $\{(x,y)$ tels que $F(x,y)=\alpha\}$?
2. En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction F est-elle maximale ?

Exercice 2 Soient $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des variables aléatoires continues indépendantes, chacune suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On note

$$P_n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n.$$

1. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(P_n > \varepsilon) \to 0 \quad (\text{quand } n \to \infty).$$

2. Calculer $\mathbb{E}[\ln(U_1)]$, que peut-on dire de la suite de variables aléatoires $\ln\left(\sqrt[n]{P_n}\right)$?

Planche 2

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Pour une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels, on note, pour $n \geq 1$,

$$\Delta_n = u_n - u_{n-1}.$$

On dit que (u_n) est **convexe** si (Δ_n) est croissante. On considère dans cet exercice une suite (u_n) convexe et bornée.

1. Justifier que (Δ_n) converge.
2. Démontrer que (u_n) converge.

Exercice 2 On dit que la variable aléatoire X à valeurs dans $]0, +\infty[$ suit la loi log-normale si $Y = \ln(X)$ suit la loi normale centrée réduite.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[X^n] < +\infty$.
2. Déterminer la densité de la loi log-normale.

Planche 3

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[\,|X|\,] < +\infty$.

On pose, pour $a \in \mathbb{R}$,
$$\phi(a) = \mathbb{E}[\,|X - a|\,].$$

1. Démontrer que $\lim_{a\to\infty} \phi(a) = +\infty$.
2. Démontrer que, pour tous réels x, a, b,
$$|x - a| - |x - b| \leq |a - b|.$$
En déduire que ϕ est continue.
3. Justifier que ϕ admet (au moins) un minimum sur $\mathbb{R}$. Pour quelles variables aléatoires X ce minimum vaut-il zéro ?

Exercice 2 Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions de $\mathcal{F}$ qui vérifient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f''(t) - 6f(t)' + 9f(t) = 0.$$

1. Pour quelles constantes α la fonction $t \mapsto \exp(\alpha t)$ appartient à $\mathcal{S}$?
2. Justifier que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.
3. Soit Φ l'application linéaire
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathcal{F} \\ (t \mapsto f(t)) & \mapsto & (t \mapsto f(t)\exp(-3t)). \end{array}$$
Quelle est l'image de Φ ?

Planche 4

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$. On note a_n cette solution.
2. Montrer que $a_n \leq 1/n$ et que la suite (a_n) est monotone.
3. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.
4. Montrer que $\lim_{n\to\infty} na_n = 1$.

Exercice 2 Soit $\theta > 0$ une constante, et $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des variables aléatoires continues indépendantes, chacune suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$.

On note $M_n = \max\{U_1, \ldots, U_n\}$ la plus grande valeur parmi les U_i.

1. Déterminer la loi de M_n, puis son espérance.
2. En déduire un estimateur sans biais de θ. Existe-t-il d'autres estimateurs sans biais ?

Planche 5

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces deux exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soit $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_{\times}^{+}$ une fonction strictement positive et continue. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel pour pour $t \geq 0$

$$u(t) \leq 1 + \int_0^t \lambda u(s) ds.$$

On pose $U(t) = 1 + \int_0^t \lambda u(s) ds$.

1. Démontrer que pour tout t
$$\frac{U'(t)}{U(t)} \leq \lambda.$$
2. Démontrer que $u(t) \leq \exp(\lambda t)$.

Exercice 2 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de densité

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda \exp(-\lambda x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $L_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $U_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Calculer la fonction de répartition de L_n, puis celle de U_n.
2. Quelle est la loi de $Y_n = n\lambda L_n$?
3. On pose $Z_n = \lambda U_n - \ln(n)$. Calculer la fonction de répartition F_n de Z_n, puis trouver la limite de $F_n(x)$ pour tout réel x quand n tend vers l'infini.
4. On dispose de n ampoules identiques, dont on modélise les durées de vie par des variables exponentielles indépendantes. On suppose que l'on sait seulement combien de temps a fonctionné l'ampoule qui a claqué le plus tôt. À partir de cette seule information, proposer un estimateur pour la durée de vie moyenne des ampoules. Cet estimateur est-il sans biais ?

Planche 6

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>*deux*</u> *exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes définie par $P_0(x) = 0$ et, pour tout $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - (P_n(x))^2}{2}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [0, 1]$, $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$.
2. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \geq 1$,

$$\sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

Exercice 2 Soient n, k deux entiers. On considère k événements mutuellement indépendants A_1, A_2 ,..., A_k avec, pour tout $i \leq k$, $\mathbb{P}(A_i) = 1/n$.

1. Calculer
$$\mathcal{P}_{n,k} = \mathbb{P}(\text{ au moins un événement } A_i \text{ est réalisé }).$$
2. On prend $k = n$, calculer $\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{n,n}$.
3. À partir de quel entier n la probabilité $\mathcal{P}_{n,n}$ est-elle supérieure à 90% ?

Planche 7

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>*deux*</u> *exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soient $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des variables aléatoires continues indépendantes, chacune suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

On note $M^1 = \min\{U_1, \ldots, U_n\}$ la plus petite valeur parmi les U_i, et M^2 la deuxième plus petite valeur.

1. Déterminer, en fonction de n, la loi de M^1. Calculer son espérance.
2. Déterminer, en fonction de n, la loi de M^2.

Exercice 2 On s'intéresse aux fonctions dérivables $[0, 1] \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\begin{cases} f'(t) = \sin(f(t)) \text{ pour tout } t > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Le but est de démontrer que la fonction nulle est la seule solution.

1. Démontrer que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|f(t)| \leq t^2$ (on pourra utiliser l'inégalité $\sin(t) \leq t$).
2. Démontrer maintenant que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|f(t)| \leq t^3$.
3. Expliquer comment démontrer que la fonction nulle est la seule solution.

Planche 8

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>*deux*</u> *exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soit f une fonction continue $[0,1] \to [0,1]$. On suppose qu'il existe une constante $0 < c < 1$ tel que, pour tous x, y dans $[0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

Démontrer que l'équation

$$f(x) = x$$

admet une unique solution dans $[0,1]$.

Exercice 2 On étudie la taille d'une population de bactéries, dont l'évolution est modélisée de la façon suivante. Le jour 0, la population est constituée d'une seule bactérie. Chaque jour, chaque bactérie se comporte indépendamment des autres et de ce qui s'est passé avant, de la façon suivante :

- avec probabilité p_0 : elle meurt et ne donne pas de descendance,
- avec probabilité p_4 : elle meurt mais donne naissance à 4 bactéries.

Les paramètres p_0, p_4 sont deux réels positifs avec $p_0 + p_4 = 1$.

On cherche à calculer la probabilité x que la population finisse par s'éteindre un jour.

1. Justifier que x est solution de l'équation
$$x = p_0 + p_4 x^4.$$
2. Discuter, en fonction des paramètres p_0, p_4, du nombre de solutions de l'équation $x = p_0 + p_4 x^4$.

Planche 9

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>*deux*</u> *exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soit f une fonction continue $[0, 1] \to [0, 1]$, dérivable sur l'ouvert $]0, 1[$. On suppose que f' est croissante sur $]0, 1[$.

On suppose que $f(1) < 1$, montrer que l'équation

$$f(x) = x$$

admet une unique solution dans $[0, 1]$.

Exercice 2 On considère un échantillon de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant une loi normale centrée et de variance σ^2. On cherche à estimer σ^2 par un estimateur de la forme

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} X_k^2,$$

où p est un réel positif. On rappelle que le *biais* de $\hat{\sigma}_p^2$ est la quantité

$$b(p) = \mathbb{E}\left[\hat{\sigma}_p^2\right] - \sigma^2.$$

On appelle *risque quadratique moyen* de $\hat{\sigma}_p^2$ la quantité

$$R(p) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\sigma}_p^2 - \sigma^2\right)^2\right].$$

1. Que vaut $\mathbb{E}[X_1^i]$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$?
2. Comment choisir p pour que $\hat{\sigma}_p^2$ soit sans biais ?
3. Comment choisir p pour que $\hat{\sigma}_p^2$ soit de risque quadratique minimal ?

Planche 10

Ce sujet d'oral est composé de deux exercices. Vous présenterez ces <u>*deux*</u> *exercices à l'oral, dans l'ordre de votre choix.*

Préparation : 30 min - Interrogation : 30 min

Exercice 1 Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi dans $\mathbb{N}$, définie par

$$\mathbb{P}(X_i \geq k) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \text{ pour tout entier } k \geq 1.$$

Pour un réel $A > 1$, on pose $X_i^A = \min\{X_i, A\}$, c'est-à-dire $X_i^A = A$ si $X_i > A$, et $X_i^A = X_i$ si $X_i \leq A$.

1. Démontrer que $\mathbb{E}[X_i^A] \geq \sqrt{A}$.
2. Que peut-on dire de la suite de variables aléatoires $\frac{1}{n}(X_1^A + X_2^A + \cdots + X_n^A)$?
3. Démontrer que, pour tout $A > 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \leq \sqrt{A}/2\right) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Exercice 2 Soit (u_k) une suite de réels appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

Démontrer que la somme

$$\sum_{k\geq 1} (u_k)^{k^2}(1 - u_k)$$

est finie.

(On pourra étudier la fonction $x \mapsto x^{n^2}(1 - x)$.)